Modulprüfung zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Bearbeitungszeit: zwei Stunden

In allen Teilen der Klausur sind Begründungen verlangt. Dabei dürfen nur Definitionen, Aussagen und Methoden aus den Vorlesungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie I+II aus dem WiSe 17/18 und dem SoSe 18 (Prof. König) zitiert und ohne weitere Erklärung genutzt werden. Andere Definitionen und Aussagen müssen gegebenenfalls eingeführt bzw. bewiesen werden.

Erster Teil (12 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Punkte gibt es für die korrekte Begründung.

1. *(3 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei τ ein Element der symmetrischen Gruppe Σ_n. Die Abbildung $f : \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_n$ gegeben durch $f(\sigma) = \tau \circ \sigma \circ \tau$ ist ein Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn $\tau^3 = \tau$.

2. *(3 Punkte)* Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $x, y, z \in V$. Falls ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\varphi(x) + \varphi(y) = \lambda\varphi(z)$ für alle $\varphi \in V^*$, dann ist $x + y = \lambda z$.

3. *(3 Punkte)* Sei λ ein Eigenwert einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ und μ ein Eigenwert einer Matrix $B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$. Dann ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert der Matrix AB.

4. *(3 Punkte)* Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ gibt es zu jedem 2-dimensionalen Unterraum E_1 genau einen 2-dimensionalen Unterraum E_2, sodass $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \in E_1, y \in E_2$.

Zweiter Teil (42 Punkte)

5. *(4 Punkte)* Sei $\Delta : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[x]$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung gegeben durch $\Delta(p) = \sum_{j=1}^{n} a_j j x^{j-1}$ für $p = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{C}[x]$. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die ein $p \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ existiert, sodass $\Delta(p) = z \cdot p$. Bestimmen Sie für diese $z \in \mathbb{C}$ jeweils den Unterraum $E(z) := \{p \in \mathbb{C}[x] \mid \Delta(p) = z \cdot p\}$.

6. *(17 Punkte)* Sei V ein 6-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V, gegeben durch die Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Sei $g : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, sodass

$$\begin{aligned} g(v_1) &= v_1 + 2v_4 + 3v_5 + v_6, & g(v_4) &= v_4 + 2v_5 + v_6, \\ g(v_2) &= 2v_1 + v_2 + 3v_4 + 4v_5 + v_6, & g(v_5) &= v_5 + v_6, \\ g(v_3) &= 7iv_3, & g(v_6) &= -v_6. \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, das charakteristische Polynom χ_g, das Minimalpolynom μ_g sowie die Eigenwerte von g und deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

   (b) Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform von g und eine Basis $\mathcal{C}$ von V, sodass die darstellende Matrix von g bezüglich $\mathcal{C}$ in Jordan-Normalform ist.

7. *(9 Punkte)* Sei $B \in \mathrm{Mat}(14 \times 14, \mathbb{C})$ eine Matrix, deren Minimalpolynom gegeben ist durch $(x+i)^3(x+\mu)(x+1)^4(x+3)^3$. Außerdem nehmen wir an, dass

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Kern}(B+iE_{14})) &= 3, & \mathrm{Rg}((B+E_{14})^2) &= 11, \\ \dim(\mathrm{Kern}((B+iE_{14})^2)) &= 4, & \mathrm{Rg}(B+3E_{14}) &= 13. \\ \dim(\mathrm{Kern}(B+E_{14})) &= 2, & & \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für $\mu \in \{1, 2\}$ jeweils eine Jordan-Normalform von B.

8. *(8 Punkte)* Sei $\psi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform definiert durch

$$\psi(x, y) = 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - x_3y_3 + 4x_4y_4,$$

wobei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{t}}, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von ψ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ und geben Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^4$ an, sodass die darstellende Matrix von ψ bezüglich $\mathcal{C}$ diagonal ist. Entscheiden Sie, ob ψ positiv definit ist.

9. *(4 Punkte)* Sei $V = \mathbb{R}^4$ und sei S der $\mathbb{R}$-Unterraum $[\{(1,1,1,1)^{\mathrm{t}}, (-1,-1,1,-1)^{\mathrm{t}}\}]$ von V. Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Unterraumes S° von V^*.

Dritter Teil (26 Punkte)

10. *(7 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Wir betrachten eine Determinantenfunktion $D : W^n \longrightarrow \mathbb{K}$ und eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$. Sei $D' : V^n \longrightarrow \mathbb{K}$ die Abbildung gegeben durch $D'(v_1, \cdots, v_n) = D(f(v_1), \cdots, f(v_n))$.
    (a) Zeigen Sie, dass D' eine Determinantenfunktion ist.
    (b) Nehmen Sie an, dass $\dim_{\mathbb{K}} W = n$. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist, wenn $D' \neq 0$.

11. *(8 Punkte)* Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus mit Rang r.
    (a) Zeigen Sie, dass das Polynom x^{n-r} das charakteristische Polynom χ_f von f teilt.
    (b) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_f von f maximal Grad $r+1$ hat.
    (c) Nehmen Sie nun an, dass f nilpotent ist. Hat das Minimalpolynom μ_f von f dann genau Grad $r+1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

12. *(5 Punkte)* Sei A ein affiner Raum über einem Körper $\mathbb{K}$ bezüglich eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Sei $X \neq \emptyset$ eine Teilmenge von A.
    (a) Nehmen Sie an, dass X ein affiner Teilraum von A ist. Zeigen Sie, dass für Punkte $p, q \in X$ die affine Hülle $[p, q]$ in X enthalten ist.
    (b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Ist X ein affiner Teilraum von A, wenn für alle Punkte $p, q \in X$ die affine Hülle $[p, q]$ in X enthalten ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

13. *(3 Punkte)* Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle Elemente x, y in V gilt: $||x|| = ||y||$ genau dann, wenn $x - y$ und $x + y$ orthogonal sind.

14. *(3 Punkte)* Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Bestimmen Sie alle Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, die normal und nilpotent sind.