Version A

Schriftliche Aufgaben (35 Punkte)

6. *(6 Punkte)* Sei V ein 6-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $g : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich einer Basis von V gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Eigenwerte von g an, sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten, das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von g. Geben Sie auch die rationale Normalform von g an. Begründungen sind hier nicht verlangt.

7. *(5 Punkte)* Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $N \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{K})$ eine nilpotente Matrix. Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von N an. Erklären Sie zudem, warum Ihre Liste vollständig ist.

Bei den folgenden Aufgaben sind Begründungen verlangt!

8. *(6 Punkte)* Sei $y \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A in $\mathrm{Mat}((n+1) \times (n+1), \mathbb{Q})$, die gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} y & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ y & y+1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ y & y+1 & y+2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y+1 & y+2 & y+3 & \cdots & y+(n-1) & n \\ y & y+1 & y+2 & y+3 & \cdots & y+(n-1) & y+n \end{pmatrix}.$$

9. *(9 Punkte)* Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 18 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

   (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

   (b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraumes.

   (c) Ist A diagonalisierbar?

10. *(4 Punkte)* Sei $f : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom $\chi_f = (x-i)^3 \cdot (x-2)$ und Minimalpolynom $m_f = (x-i)^2 \cdot (x-2)$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von f.

11. *(5 Punkte)* Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f^2 = \mathrm{id}_V$, $g^2 = -\mathrm{id}_V$ und $f \circ g = g \circ f$. Ist $f \circ g$ diagonalisierbar?

-Bitte auf diesem Blatt keine Lösungen eintragen-