Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 11.04.2018
Aufgabenblatt 1

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Die Vektoren $(2,1,1)+[\{(1,1,1)\}], (2,3,3)+[\{(1,1,1)\}]$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3/[\{(1,1,1)\}]$.
   (ii) Wenn U der Unterraum $\{(x+1)p \mid p \in \mathbb{R}[x]\}$ des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}[x]$ ist, dann gilt die Gleichung $(5+x-x^2)+U=(4+x)+U$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[x]/U$.
   (iii) $(*)$ In der Gruppe Σ_5 gelten die Gleichungen $(1\,2)\circ(1\,3\,4\,2\,5)=(1\,3\,4)\circ(2\,5)$ und $(1\,3\,2)=(2\,1\,3)$.
   (iv) $\mathbb{Z}_4 \setminus \{[0]\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition oder der Multiplikation.
   (v) $(*)$ Wenn X eine abzählbare Menge ist, dann ist $I_X := \{f\colon X \longrightarrow X \text{ ist injektiv}\}$ eine Gruppe bezüglich der Komposition genau dann, wenn X endlich ist.
   (vi) Die Menge $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition.
   (vii) Ein Ring $(R,+,\cdot)$ ist ein Körper genau dann, wenn $(R\setminus\{0\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

2. Eine Gruppe von n Personen ($n \geq 4$) spielt ein Spiel. Die Spieler tragen Trikots, die mit den Zahlen von 1 bis n nummeriert sind. Für alle $1 \leq i \leq n$ erhält am Anfang der Spieler mit Trikotnummer i einen Ball, der mit der Zahl i markiert ist. Zwei verschiedene Spieler können jederzeit ihre Bälle tauschen. Für $i \neq j$ können die Spieler mit Trikotnummern i und j jedoch nur einmal tauschen. Wir nehmen an, dass die Spieler mit Trikotnummern 1 und 2 zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem beliebigen Spiel noch keinen Zug gemacht haben. Ist es immer möglich, das Spiel fortzusetzen, sodass jeder Spieler den Ball erhält, mit dem er begonnen hat?

3. Sei $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und sei n eine natürliche Zahl.
   (i) $(*)$ Zeigen Sie, dass S eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation ist.
   (ii) $(*)$ Sei $C_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Zeigen Sie, dass C_n eine Untergruppe von S ist.
   (iii) $(*)$ Sind $(C_n,\cdot)$ und $(\mathbb{Z}_n,+_n)$ isomorph als Gruppen?

4. Wir betrachten 2×2 Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{K}$.
   (i) Zeigen Sie auf mindestens zwei verschiedene Arten, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist genau dann, wenn $ad-bc \neq 0$.
   (ii) Wir betrachten $d : \mathrm{GL}(2,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}\setminus\{0\}$ gegeben durch $d(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad-bc$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K}) := d^{-1}(\{1\})$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$ ist.
   (iii) Zeigen Sie, dass d ein Gruppenhomomorphismus ist.

5. Für eine natürliche Zahl n sei die Abbildung $\mathrm{Spur}\colon \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ gegeben durch $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ für $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) $\mathrm{Spur}(CD) = \mathrm{Spur}(DC)$ für alle $C \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ und $D \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$.
   (ii) $\mathrm{Spur}(SAS^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ und $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.
   (iii) $\mathrm{Spur}(A_1 A_2 \cdots A_m) = \mathrm{Spur}(A_{\pi(1)} A_{\pi(2)} \cdots A_{\pi(m)})$ für $A_i \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ sowie $\pi = (1\,2\,\ldots\,m)^q$ mit $q \in \mathbb{N}$.
   (iv) Finden Sie quadratische Matrizen A, B, C mit $\mathrm{Spur}(ABC) \neq \mathrm{Spur}(BAC)$.
   (v) Folgern Sie, dass im Allgemeinen $\mathrm{Spur}(AB) \neq \mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B)$. Ist Spur eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung?

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 18.04.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18