Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 18.04.2018
Aufgabenblatt 2

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) ($*$) Wenn in einer Gruppe G jedes Element g die Gleichung $g^2 = 1_G$ erfüllt, dann ist G eine abelsche Gruppe.
   (ii) Es gibt unendlich viele Isomorphieklassen von Gruppen G mit Ordnung $|G| = 4$.
   (iii) Eine Gruppe G ist abelsch genau dann, wenn die Abbildung $f : G \longrightarrow G$ gegeben durch $f(g) := g^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.
2. ($*$) Sei G eine endliche Gruppe und sei H eine nichtleere Teilmenge von G. Nehmen Sie an, dass $h_1h_2 \in H$ für alle $h_1, h_2 \in H$. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist. Gilt die Aussage auch, wenn G unendlich viele Elemente hat?
3. Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G mit $[G : H] = 2$. Zeigen Sie, dass H normal ist. Folgern Sie, dass A_n eine normale Untergrupe von Σ_n ist.
4. ($*$) Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* von G ist definiert als $\mathrm{Z}(G) := \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in G\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Z}(G)$ eine normale und abelsche Untergruppe von G ist und bestimmen Sie $\mathrm{Z}(\Sigma_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
5. Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$. Mit $\langle g \rangle$ bezeichnen wir die kleinste Untergruppe von G, die g enthält. Die Anzahl der Elemente in $\langle g \rangle$ heißt die *Ordnung* von g und wird mit $\mathrm{Ord}(g)$ bezeichnet.
   (i) ($*$) Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ord}(g)$ ein Teiler von $|G|$ ist.
   (ii) ($*$) Bestimmen Sie die Ordnung der Elemente $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und AB in der Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$.
   (iii) Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Die Zahl $d = \max\{t \in \mathbb{N} \mid t \text{ teilt } x \text{ und } y\}$ heißt *größter gemeinsamer Teiler* von x und y und wird mit $\mathrm{ggT}(x, y)$ bezeichnet. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $\varphi(n) := |\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ und } \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}|$ heiß die *Eulersche φ-Funktion*. Nehmen Sie an, dass $G = \langle g \rangle$ für ein Element $g \in G$ und $|G| = n$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ord}(g^k) = \frac{n}{\mathrm{ggT}(k,n)}$ und berechnen Sie die Elementezahl der Menge $\{h \in G \mid \langle h \rangle = G\}$.
   (iv) Sei $G = \langle g \rangle$ für ein Element $g \in G$ und $|G| = xy$ mit $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Zeigen Sie, dass es eindeutige $h, h' \in G$ mit $\mathrm{Ord}(h) = x$, $\mathrm{Ord}(h') = y$ und $g = hh'$ gibt. Folgern Sie, dass $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
   (v) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p})$.
   (vi) Seien $p_1, \ldots, p_l$ die verschiedenen Primfaktoren einer natürlichen Zahl n. Zeigen Sie, dass $\varphi(n) = n \prod_{j=1}^{l}(1 - \frac{1}{p_j})$ und berechnen Sie $\varphi(252)$.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem ($*$) gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 25.04.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18