Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2017/18
Mittwoch, 20.06.2018
Aufgabenblatt 10

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sind ähnlich.
   (ii) Es gibt genau fünf verschiedene Ähnlichkeitsklassen von reellen Matrizen A mit $\chi_A = (x-3)^4(x-5)^4$ und $\mathrm{Grad}(m_A) = 4$.
   (iii) Wenn $A_i \in \mathrm{Mat}(8 \times 8, \mathbb{C})$ und $m_{A_i} = x^3$ für $1 \leq i \leq 6$, gibt es $1 \leq k < l \leq 6$, sodass A_k und A_l ähnliche Matrizen sind.
   (iv) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, sodass die Matrizen A und A^{t} nicht ähnlich sind.
   (v) $(*)$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ und

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$ in $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ ähnlich.

2. $(*)$ Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B ähnlich sind genau dann, wenn $\chi_A = \chi_B$ und $m_A = m_B$. Gilt das auch allgemeiner für $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit $n \in \mathbb{N}$?

3. Seien $f_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ und $f_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^7)$ die linearen Abbildungen, die bezüglich der Standardbasis gegeben sind durch A_i mit $i = 1, 2$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform für f_1 und f_2 und geben Sie jeweils Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ an, sodass die darstellende Matrix von f_i bezüglich $\mathcal{B}_i$ in Jordan-Normalform ist.

   (i) $(*)$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $(*)$ $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. $(*)$ Sei $A \in \mathrm{Mat}(14 \times 14, \mathbb{C})$ mit $m_A = (x-i)^2 \cdot (x-2i) \cdot (x-3i)^2 \cdot (x-4i)^3$. Wir nehmen an, dass $\mathrm{Rang}(A - iE_{14}) = 11$, $\mathrm{Rang}((A - iE_{14})^2) = 10$, $\mathrm{Rang}(A - 3iE_{14}) = 12$, $\mathrm{Rang}((A - 3iE_{14})^2) = 10$ und $\mathrm{Rang}(A - 4iE_{14}) = 13$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.
5. Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$. Geben Sie eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$ mit $B^2 = A$ an.
6. Seien $u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}, v = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{C}^n$ und sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit $a_{ij} = u_i \cdot v_j$.
   (i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren von A.
   (ii) Bestimmen Sie alle möglichen Jordan-Normalformen von A.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 27.06.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18