ONLINE-TEST 3

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Alle $\mathbb{C}$-Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes haben einen Eigenwert in $\mathbb{C}$. ◯ wahr ◯falsch
- Alle $\mathbb{Q}$-Endomorphismen von $\mathbb{Q}^2$ haben einen Eigenvektor. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Alle $\mathbb{C}$-Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes haben einen Eigenwert in $\mathbb{C}$. ◯ wahr ◯falsch
- Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass f keinen Eigenvektor hat. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Alle $\mathbb{R}$-Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ haben einen Eigenvektor. ◯ wahr ◯falsch
- Alle $\mathbb{C}$-Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes haben einen Eigenwert in $\mathbb{C}$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Alle $\mathbb{C}$-Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes haben einen Eigenwert in $\mathbb{C}$. ◯ wahr ◯falsch
- Alle $\mathbb{Q}$-Endomorphismen eines $\mathbb{Q}$-Vektorraumes der Dimension 2 haben einen Eigenvektor. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und sei $V = \{(a_i)_{i\geq 0} : a_i \in K\}$ der K-Vektorraum aller unendlichen Folgen. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch $f((a_i)_{i\geq 0}) = ((i+1)a_{i+1})_{i\geq 0}$ (z.B.: $f((1,1,1,1,...)) = (1,2,3,4,5,...)$). Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Wenn K Charakteristik null hat, dann hat f eine endliche Anzahl von Eigenwerten in K.

□Sei $W = \{(a_i)_{i\geq 0} \in V$: es gibt $n \geq 0$, sodass $a_i = 0$ für alle$i \geq n\}$. Die Einschränkung $f|_W : W \to W$ hat einen Eigenwert in K.

Sei K ein Körper und sei $V = \{(a_i)_{i\geq 0} : a_i \in K\}$ der K-Vektorraum aller unendlichen Folgen. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch $f((a_i)_{i\geq 0}) = ((i+1)a_{i+1})_{i\geq 0}$ (z.B.: $f((1,1,1,1,...)) = (1,2,3,4,5,...)$). Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Wenn K Charakteristik null hat, dann hat f eine unendliche Anzahl von Eigenwerten in K.

□Sei $W = \{(a_i)_{i\geq 0} \in V$: es gibt $n \geq 0$, sodass $a_i = 0$ für alle$i \geq n\}$. Die Einschränkung $f|_W : W \to W$ hat einen Eigenvektor.

Sei K ein Körper und sei $V = \{(a_i)_{i\geq 0} : a_i \in K\}$ der K-Vektorraum aller unendlichen Folgen. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch $f((a_i)_{i\geq 0}) = ((i+1)a_{i+1})_{i\geq 0}$ (z.B.: $f((1,1,1,1,...)) = (1,2,3,4,5,...)$). Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Wenn K Charakteristik null hat, dann hat f eine endliche Anzahl von Eigenwerten in K.

□Sei $W = \{(a_i)_{i\geq 0} \in V$: es gibt $n \geq 0$, sodass $a_i = 0$ für alle$i \geq n\}$. Die Einschränkung $f|_W : W \to W$ hat einen Eigenvektor.

Sei K ein Körper und sei $V = \{(a_i)_{i\geq 0} : a_i \in K\}$ der K-Vektorraum aller unendlichen Folgen. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch $f((a_i)_{i\geq 0}) = ((i+1)a_{i+1})_{i\geq 0}$ (z.B.: $f((1,1,1,1,...)) = (1,2,3,4,5,...)$). Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Wenn K Charakteristik null hat, dann hat f eine unendliche Anzahl von Eigenwerten in K.

□Sei $W = \{(a_i)_{i\geq 0} \in V$: es gibt $n \geq 0$, sodass $a_i = 0$ für alle$i \geq n\}$. Die Einschränkung $f|_W : W \to W$ hat einen Eigenwert in K.

Aufgabe 3

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} k & 2 & 2k + k^2 & -3 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2 - 4 \\ 0 & -1 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn $k = \boxed{}$ ist.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} k & -1 & 2k+k^2 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2-4 \\ 0 & 3 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn $k = \boxed{}$ ist.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} k & 2 & 2k+k^2 & -1 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2-4 \\ 0 & 3 & k & -5 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn $k = \boxed{}$ ist.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} k & 5 & 2k+k^2 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2-4 \\ 0 & -1 & k & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn $k = \boxed{}$ ist.

Aufgabe 4

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $E_n \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenvektoren v von M ist v ein Eigenvektor von $M^2 - 3M + E_n$.

☐ Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist λ ein Eigenwert von $M^2 - 3M + E_n$.

☐ Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist $\lambda^2 - 3\lambda + 1$ ein Eigenwert von $M^2 - 3M + E_n$.

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $E_n \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenvektoren v von M ist v ein Eigenvektor von $2M^2 - M + E_n$.

☐ Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist λ ein Eigenwert von $2M^2 - M + E_n$.

□Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist $2\lambda^2 - \lambda + 1$ ein Eigenwert von $2M^2 - M + E_n$.

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $E_n \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenvektoren v von M ist v ein Eigenvektor von $-M^2+3M+E_n$.

□Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist λ ein Eigenwert von $-M^2 + 3M + E_n$.

□Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist $-\lambda^2 + 3\lambda + 1$ ein Eigenwert von $-M^2 + 3M + E_n$.

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $E_n \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenvektoren v von M ist v ein Eigenvektor von $2M^2+3M+E_n$.

□Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist λ ein Eigenwert von $2M^2 + 3M + E_n$.

□Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist $2\lambda^2 + 3\lambda + 1$ ein Eigenwert von $2M^2 + 3M + E_n$.

Aufgabe 5

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Seien $p, q \in \mathbb{Q}[x]$, sodass $p|q$ und $q|p$. Dann gilt $p = q$. ○ wahr ○falsch
2. Seien $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Wenn $\{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : q(\lambda) = 0\}$, dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, sodass $p|q^r$. ○ wahr ○falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Seien $p, q \in \mathbb{R}[x]$, sodass $q|p$ und $p|q$. Dann gilt $q = p$. ○ wahr ○falsch
2. Seien $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Wenn $\{\lambda \in \mathbb{C} : q(\lambda) = 0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}$, dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, sodass $q|p^r$. ○ wahr ○falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Seien $p, q \in \mathbb{C}[x]$, sodass $q|p$ und $p|q$. Dann gilt $p = q$. ○ wahr ○falsch

2. Seien $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Wenn $\{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : q(\lambda) = 0\}$, dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, sodass $p|q^r$.
   ◯ wahr ◯falsch

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Seien $p, q \in \mathbb{Q}[x]$, sodass $q|p$ und $p|q$. Dann gilt $q = p$. ◯ wahr ◯falsch
2. Seien $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Wenn $\{\lambda \in \mathbb{C} : q(\lambda) = 0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}$, dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, sodass $q|p^r$.
   ◯ wahr ◯falsch