

ONLINE-TEST 4

Aufgabe 1

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Es gibt $A \in \text{Mat}(5 \times 5, \mathbb{R})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}(\{A^i : i \geq 0\}) = 15$, wobei $\{A^i : i \geq 0\}$ die lineare Hülle von $\{A^i : i \geq 0\}$ ist.

Sei $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{Q}$, sodass $A^2 = \lambda A$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Es gibt $A \in \text{Mat}(6 \times 6, \mathbb{C})$, sodass $\dim_{\mathbb{C}}(\{A^i : i \geq 0\}) = 15$, wobei $\{A^i : i \geq 0\}$ die lineare Hülle von $\{A^i : i \geq 0\}$ ist.

Sei $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\mu \in \mathbb{R}$, sodass $\mu A = A^2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Es gibt $A \in \text{Mat}(7 \times 7, \mathbb{Q})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}(\{A^i : i \geq 0\}) = 13$, wobei $\{A^i : i \geq 0\}$ die lineare Hülle von $\{A^i : i \geq 0\}$ ist.

Sei $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda A = A^2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Es gibt $A \in \text{Mat}(9 \times 9, \mathbb{Q})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}(\{A^i : i \geq 0\}) = 19$, wobei $\{A^i : i \geq 0\}$ die lineare Hülle von $\{A^i : i \geq 0\}$ ist.

Sei $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\mu \in \mathbb{C}$, sodass $\mu A = A^2$.

Aufgabe 2

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$M^{-1} \in \{M^i : i \geq 0\}$ für alle $M \in \text{GL}(5, \mathbb{R})$.

Es gibt $M \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$, sodass $\text{Adj}(M) \notin \{E_2, M\}$, wobei E_2 die Einheitsmatrix ist.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$M^{-1} \in \{M^i : i \geq 0\}$ für alle $M \in \text{GL}(6, \mathbb{Q})$.

Es gibt $M \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\text{Adj}(M) \notin \{E_2, M\}$, wobei E_2 die Einheitsmatrix ist.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$M^{-1} \in \{M^i : i \geq 0\}$ für alle $M \in \text{GL}(7, \mathbb{C})$.

Es gibt $M \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, sodass $\text{Adj}(M) \notin \{E_2, M\}$, wobei E_2 die Einheitsmatrix ist.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$M^{-1} \in \{M^i : i \geq 0\}$ für alle $M \in \text{GL}(8, \mathbb{C})$.

Es gibt $M \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\text{Adj}(M) \notin \{E_2, M\}$, wobei E_2 die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{Q}[x]$ der Vektorraum der Polynome und sei $\varphi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}$ die lineare Abbildung gegeben durch $\varphi(P) = P(2)$. Betrachten Sie die Basis $B = \{x^i : i \geq 0\}$ von $\mathbb{Q}[x]$. Für alle $i \geq 0$ bezeichnen wir mit $(x^i)^*$ die lineare Abbildung gegeben durch $(x^i)^*(x^i) = 1$ und $(x^i)^*(x^j) = 0$ für alle $j \neq i$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es gibt $n \geq 0$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, sodass $\varphi = \sum_{i=0}^n \lambda_i (x^i)^*$. wahr falsch
2. Für alle $n \geq 0$ ist die Menge $\{(x^i)^* : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\{P \in \mathbb{Q}[x] : P = 0 \text{ oder } \text{Grad}(P) \leq n\}^*$. wahr falsch

Sei $\mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome und sei $\varphi : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ die lineare Abbildung gegeben durch $\varphi(P) = P(3)$. Betrachten Sie die Basis $B = \{x^i : i \geq 0\}$ von $\mathbb{C}[x]$. Für alle $i \geq 0$ bezeichnen wir mit $(x^i)^*$ die lineare Abbildung gegeben durch $(x^i)^*(x^i) = 1$ und $(x^i)^*(x^j) = 0$ für alle $j \neq i$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Für alle $n \geq 0$ ist die Menge $\{(x^i)^* : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\{P \in \mathbb{C}[x] : P = 0 \text{ oder } \text{Grad}(P) \leq n\}^*$. wahr falsch
2. Es gibt $n \geq 0$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $\varphi = \sum_{i=0}^n \lambda_i (x^i)^*$. wahr falsch

Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome und sei $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ die lineare Abbildung gegeben durch $\varphi(P) = P(-2)$. Betrachten Sie die Basis $B = \{x^i : i \geq 0\}$ von $\mathbb{R}[x]$. Für alle $i \geq 0$ bezeichnen wir mit $(x^i)^*$ die lineare Abbildung gegeben durch $(x^i)^*(x^i) = 1$ und $(x^i)^*(x^j) = 0$ für alle $j \neq i$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Für alle $n \geq 0$ ist die Menge $\{(x^i)^* : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\{P \in \mathbb{R}[x] : P = 0 \text{ oder } \text{Grad}(P) \leq n\}^*$. wahr falsch

2. Es gibt $n \geq 0$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, sodass $\varphi = \sum_{i=0}^n \lambda_i (x^i)^*$. wahr falsch

Sei $\mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome und sei $\varphi : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ die lineare Abbildung gegeben durch $\varphi(P) = P(-3)$. Betrachten Sie die Basis $B = \{x^i : i \geq 0\}$ von $\mathbb{C}[x]$. Für alle $i \geq 0$ bezeichnen wir mit $(x^i)^*$ die lineare Abbildung gegeben durch $(x^i)^*(x^i) = 1$ und $(x^i)^*(x^j) = 0$ für alle $j \neq i$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es gibt $n \geq 0$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $\varphi = \sum_{i=0}^n \lambda_i (x^i)^*$. wahr falsch
2. Für alle $n \geq 0$ ist die Menge $\{(x^i)^* : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\{P \in \mathbb{C}[x] : P = 0 \text{ oder } \text{Grad}(P) \leq n\}^*$. wahr falsch

————— Aufgabe 4 —————

Sei V der Untervektorraum von \mathbb{R}^3 gegeben durch $V = [\{(1, 1, 2), (-1, 0, 1)\}]$. Sei $\varphi \in V^\circ \setminus \{0\}$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$\varphi(1, 1, 1) \neq 0$.

$\varphi(1, 0, 2) = 3$.

$\varphi(a, 0, b) = \varphi(b, 0, a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. —————

Sei V der Untervektorraum von \mathbb{C}^3 gegeben durch $V = [\{(1, 0, -1), (1, 1, 3)\}]$. Sei $\varphi \in V^\circ \setminus \{0\}$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$\varphi(1, 1, 1) \neq 0$.

$\varphi(a, 0, b) - \varphi(b, 0, a) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

$\varphi(1, -1, 1) = 6$.

Sei V der Untervektorraum von \mathbb{R}^3 gegeben durch $V = [\{(1, 1, -2), (-2, 0, 2)\}]$. Sei $\varphi \in V^\circ \setminus \{0\}$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$\varphi(1, 1, 1) = 3$.

$\varphi(1, -1, 1) \neq 0$.

$\varphi(0, a, b) - \varphi(0, b, a) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Sei V der Untervektorraum von \mathbb{C}^3 gegeben durch $V = [\{(2, 0, -2), (-1, -1, 3)\}]$. Sei $\varphi \in V^\circ \setminus \{0\}$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

$\varphi(1, 1, 1) = 4$.

$\varphi(-1, 3, 1) \neq 0$.

$\varphi(a, 0, b) - \varphi(b, 0, a) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

————— Aufgabe 5 —————

Sei \mathbb{K} ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{15})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \text{Kern}(\varphi)) = 6$. wahr falsch

Sei \mathbb{K} ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{17})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \text{Kern}(\varphi)) = 4$. wahr falsch

Sei \mathbb{K} ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{13})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \text{Kern}(\varphi)) = 4$. wahr falsch

Sei \mathbb{K} ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{19})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \text{Kern}(\varphi)) = 2$. wahr falsch