ONLINE-TEST 5

——— Aufgabe 1 ———

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f : \mathbb{R}^3 \to V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum W gegeben durch

$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 :$ es gibt $\varphi \in V^*$, sodass $\varphi(f(x, y, z)) = ax + by + cz$ für alle$x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Im}(f) = 2$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} W = \boxed{2}$.

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f : \mathbb{R}^3 \to V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum W gegeben durch

$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 :$ es gibt $\varphi \in V^*$, sodass $\varphi(f(x, y, z)) = ax + by + cz$ für alle$x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Im}(f) = 3$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} W = \boxed{3}$.

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f : \mathbb{R}^3 \to V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum W gegeben durch

$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 :$ es gibt $\varphi \in V^*$, sodass $\varphi(f(x, y, z)) = ax + by + cz$ für alle$x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Im}(f) = \boxed{2}$.

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f : \mathbb{R}^3 \to V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum W gegeben durch

$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 :$ es gibt $\varphi \in V^*$, sodass $\varphi(f(x, y, z)) = ax + by + cz$ für alle$x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Im}(f) = \boxed{3}$.

——— Aufgabe 2 ———

Betrachten Sie die Matrix M gegeben durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -16 & -44 \\ 0 & 4 & 12 & 28 \\ 0 & -5 & -16 & -43 \\ 1 & 4 & 11 & 28 \end{pmatrix}$$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von M bezeichnen wir mit $gV(M, \lambda)$ und mit $\mu(\chi_M, \lambda)$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit von λ. Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

- $gV(M, i) =$ $\boxed{1}$.
- $\mu(\chi_M, 8) =$ $\boxed{2}$.

Betrachten Sie die Matrix M gegeben durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 & -44 \\ 0 & -4 & 12 & -28 \\ 0 & -5 & 16 & -43 \\ 1 & -4 & 11 & -28 \end{pmatrix}$$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von M bezeichnen wir mit $gV(M, \lambda)$ und mit $\mu(\chi_M, \lambda)$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit von λ. Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

- $gV(M, i) =$ $\boxed{1}$.
- $\mu(\chi_M, -8) =$ $\boxed{2}$.

Betrachten Sie die Matrix M gegeben durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -5 & 4 \\ -16 & 12 & -16 & 11 \\ -44 & 28 & -43 & 28 \end{pmatrix}$$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von M bezeichnen wir mit $gV(M, \lambda)$ und mit $\mu(\chi_M, \lambda)$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit von λ. Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

- $\mu(\chi_M, 8) =$ $\boxed{2}$.
- $gV(M, i) =$ $\boxed{1}$.

Betrachten Sie die Matrix M gegeben durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -5 & -4 \\ 16 & 12 & 16 & 11 \\ -44 & -28 & -43 & -28 \end{pmatrix}$$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von M bezeichnen wir mit $gV(M, \lambda)$ und mit $\mu(\chi_M, \lambda)$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit von λ. Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

- $\mu(\chi_M, -8) = \boxed{2}$.
- $gV(M, i) = \boxed{1}$.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\sqrt{2}$ ein Eigenwert von A ist und $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Kreuzen Sie die wahre Aussage an.

○ A ist nicht diagonalisierbar.

○ $gV(A, \sqrt{2}) \neq gV(A, -\sqrt{2})$.

⊗ $gV(A, -\sqrt{2}) = \mu(\chi_A, -\sqrt{2})$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\sqrt{3}$ ein Eigenwert von A ist und $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Kreuzen Sie die wahre Aussage an.

○ A ist nicht diagonalisierbar.

⊗ $gV(A, -\sqrt{3}) = \mu(\chi_A, -\sqrt{3})$.

○ $gV(A, \sqrt{3}) \neq gV(A, -\sqrt{3})$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\sqrt{5}$ ein Eigenwert von A ist und $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Kreuzen Sie die wahre Aussage an.

○ $gV(A, \sqrt{5}) \neq gV(A, -\sqrt{5})$.

⊗ $gV(A, -\sqrt{5}) = \mu(\chi_A, -\sqrt{5})$.

○ A ist nicht diagonalisierbar.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\sqrt{7}$ ein Eigenwert von A ist und $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Kreuzen Sie die wahre Aussage an.

⊗ $gV(A, -\sqrt{7}) = \mu(\chi_A, -\sqrt{7})$.

○ A ist nicht diagonalisierbar.

○ $gV(A, \sqrt{7}) \neq gV(A, -\sqrt{7})$.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq \boxed{2}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq \boxed{4}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq \boxed{6}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq \boxed{8}$.

Aufgabe 5

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

- [x] Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist m_A ein Teiler von χ_A.
- [ ] Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A.
- [x] Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

- [ ] Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist χ_A ein Teiler von m_A.
- [x] Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist m_A ein Teiler von χ_A.

☒Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist χ_A ein Teiler von m_A.

☒Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2.

☒Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist m_A ein Teiler von χ_A.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☒Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist m_A ein Teiler von χ_A.

☒Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A.