ONLINE-TEST 6

——— Aufgabe 1 ———

Sei $k \in \mathbb{Z}$ und seien $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die linearen Abbildungen gegeben durch

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, kx_2, 3x_3, 3x_4)$ und

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, 2x_2, 3x_3 + x_4, 3x_4)$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $k \neq 2$, dann gibt es Basen B, B' von $\mathbb{R}^4$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn $k = 2$, dann gibt es Basen B, B' von $\mathbb{R}^4$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $k \in \mathbb{Z}$ und seien $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die linearen Abbildungen gegeben durch

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2, kx_2, 2x_3, 2x_4)$ und

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1, 3x_2, 2x_3 + x_4, 2x_4)$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $k \neq 3$, dann gibt es Basen B, B' von $\mathbb{R}^4$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn $k = 3$, dann gibt es Basen B, B' von $\mathbb{R}^4$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $k \in \mathbb{Z}$ und seien $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die linearen Abbildungen gegeben durch

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_1 + x_2, kx_2, -2x_3, -2x_4)$ und

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_1, 4x_2, -2x_3 + x_4, -2x_4)$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $k \neq 4$, dann gibt es Basen B, B' von $\mathbb{R}^4$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

2. Wenn $k = 4$, dann gibt es Basen B, B' von $\mathbb{R}^4$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $k \in \mathbb{Z}$ und seien $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die linearen Abbildungen gegeben durch

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3x_1 + x_2, kx_2, 5x_3, 5x_4)$ und

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3x_1, -3x_2, 5x_3 + x_4, 5x_4)$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $k \neq -3$, dann gibt es Basen B, B' von $\mathbb{R}^4$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn $k = -3$, dann gibt es Basen B, B' von $\mathbb{R}^4$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 2

Sei $V = \{(a_i)_{i\geq 0} : a_i \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller unendlichen Folgen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei f_k die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_k : V \to V$ gegeben durch $f_k((a_i)_{i\geq 0}) = (b_i)_{i\geq 0}$, wobei $b_i = 0$ für $i \leq k-1$ und $b_i = (i+1)a_{i-k}$ für $i \geq k$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ f_0 hat eine unendliche Anzahl von Eigenwerten.

☐ Für alle $k \geq 1$ hat f_k eine unendliche Anzahl von Eigenwerten.

Sei $V = \{(a_i)_{i\geq 0} : a_i \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller unendlichen Folgen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei f_k die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_k : V \to V$ gegeben durch $f_k((a_i)_{i\geq 0}) = (b_i)_{i\geq 0}$, wobei $b_i = 0$ für $i \leq k-1$ und $b_i = (i+1)a_{i-k}$ für $i \geq k$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ f_0 hat eine endliche Anzahl von Eigenwerten.

☐ Für alle $k \geq 1$ hat f_k keinen Eigenvektor.

Sei $V = \{(a_i)_{i\geq 0} : a_i \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller unendlichen Folgen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei f_k die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_k : V \to V$ gegeben durch $f_k((a_i)_{i\geq 0}) = (b_i)_{i\geq 0}$, wobei $b_i = 0$ für $i \leq k-1$ und $b_i = (i+1)a_{i-k}$ für $i \geq k$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $k \geq 1$ hat f_k keinen Eigenvektor.

☐ f_0 hat eine unendliche Anzahl von Eigenwerten.

Sei $V = \{(a_i)_{i\geq 0} : a_i \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller unendlichen Folgen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei f_k die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_k : V \to V$ gegeben durch $f_k((a_i)_{i\geq 0}) = (b_i)_{i\geq 0}$, wobei $b_i = 0$ für $i \leq k-1$ und $b_i = (i+1)a_{i-k}$ für $i \geq k$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $k \geq 1$ hat f_k einen Eigenvektor.

☐ f_0 hat eine unendliche Anzahl von Eigenwerten.

———— Aufgabe 3 ————

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & k & -k^2 & 2 \\ 5 & -1 & k & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist M trigonalisierbar.

☐ Wenn $k = 1$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

☐ Wenn $k = 0$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & k & -k^2 & 8 \\ 7 & -1 & k & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist M trigonalisierbar.

☐ Wenn $k = 1$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

☐ Wenn $k = 0$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 11 & k & -k^2 & 5 \\ 6 & -1 & k & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist M trigonalisierbar.

☐Wenn $k = 1$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

☐Wenn $k = 0$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & k & -k^2 & 7 \\ 7 & -1 & k & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist M trigonalisierbar.

☐Wenn $k = 1$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

☐Wenn $k = 0$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

Aufgabe 4

Sei $M \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Matrix $P \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass $P^5 = M$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $M \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Matrix $P \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass $P^6 = M$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $M \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Matrix $P \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass $P^7 = M$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $M \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Matrix $P \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass $P^4 = M$. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 5

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Für jedes $v \in \mathbb{K}^n$ bezeichnen wir mit $m_{A,v}$ ein nicht triviales normiertes Polynom mit kleinsten Grad, sodass $m_{A,v}(A)v = 0$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\{p \in \mathbb{K}[x] : p(A)v = 0\} = \{p \in \mathbb{K}[x] : m_{A,v}|p\}$.

☐ $\chi_A | m_{A,v}$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$.

☐ $m_A = kgV\{m_{A,v_1}, \cdots, m_{A,v_n}\}$, wobei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Für jedes $v \in \mathbb{K}^n$ bezeichnen wir mit $m_{A,v}$ ein nicht triviales normiertes Polynom mit kleinsten Grad, sodass $m_{A,v}(A)v = 0$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\{p \in \mathbb{K}[x] : p(A)v = 0\} = \{p \in \mathbb{K}[x] : m_{A,v}|p\}$.

☐ $m_A = kgV\{m_{A,v_1}, \cdots, m_{A,v_n}\}$, wobei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist.

☐ Es gibt $v \in \mathbb{K}^n$, sodass $m_{A,v}$ kein Teiler von χ_A ist.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Für jedes $v \in \mathbb{K}^n$ bezeichnen wir mit $m_{A,v}$ ein nicht triviales normiertes Polynom mit kleinsten Grad, sodass $m_{A,v}(A)v = 0$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $m_A = kgV\{m_{A,v_1}, \cdots, m_{A,v_n}\}$, wobei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist.

☐ $m_{A,v}|\chi_A$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$.

☐ $\{p \in \mathbb{K}[x] : p(A)v = 0\} = \{p \in \mathbb{K}[x] : m_{A,v}|p\}$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Für jedes $v \in \mathbb{K}^n$ bezeichnen wir mit $m_{A,v}$ ein nicht triviales normiertes Polynom mit kleinsten Grad, sodass $m_{A,v}(A)v = 0$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $m_A = kgV\{m_{A,v_1}, \cdots, m_{A,v_n}\}$, wobei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist.

☐ $\{p \in \mathbb{K}[x] : p(A)v = 0\} = \{p \in \mathbb{K}[x] : m_{A,v} | p\}$.

☐ Es gibt $v \in \mathbb{K}^n$, sodass $m_{A,v}$ kein Teiler von χ_A ist.