ONLINE-TEST 8

Aufgabe 1

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

1. ☐Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(1,0,0),(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
   ☐Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
2. ☐Es gibt $f \in \mathbb{C}[x]$, sodass f ein Teiler von m_A ist und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.
   ☐Es gibt $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f,g) = 1$, $fg = m_A$ und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

1. ☐Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
   ☐Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(1,0,0),(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
2. ☐Es gibt $f \in \mathbb{C}[x]$, sodass f ein Teiler von m_A ist und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.
   ☐Es gibt $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f,g) = 1$, f und g Teiler von m_A sind und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

1. ☐Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(1,0,0),(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
   ☐Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
2. ☐Es gibt $f \in \mathbb{C}[x]$, sodass f ein Teiler von m_A ist und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.
   ☐Es gibt $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f,g) = 1$, f und g Teiler von m_A sind und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

1. □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
   □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(1,0,0),(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
2. □Es gibt $f \in \mathbb{C}[x]$, sodass f ein Teiler von m_A ist und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.
   □Es gibt $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f,g) = 1$, f und g Teiler von m_A sind und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$(3, 1, -2, 0)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(1, 0, 2, -1)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(1, 1, 2, -1)$ ist ein Hauptvektor von A.

Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$(5, 2, -2, 0)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(1, 1, -2, 2)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(1, 0, 2, -1)$ ist ein Hauptvektor von A.

Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$(5, 1, -2, 1)$ ist ein Hauptvektor von A.

☐$(-1, 1, -2, 3)$ ist ein Hauptvektor von A.

☐$(2, 0, 1, -2)$ ist ein Hauptvektor von A.

Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$(3, 1, -2, 1)$ ist ein Hauptvektor von A.

☐$(1, 1, -2, 2)$ ist ein Hauptvektor von A.

☐$(2, 1, 1, -2)$ ist ein Hauptvektor von A.

Aufgabe 3

Sei A eine Matrix mit komplexen Einträge und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ einer ihrer Eigenwerte. Für $i \geq 1$ definieren wir $a_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - \lambda I)^i)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Wenn $a_i = a_{i+1}$ für irgendein i gilt, dann ist $a_i = a_{i+j}$ für alle $j \geq 0$.

☐Für alle $i \geq 0$ gilt $a_i \leq a_{i+1}$.

Sei A eine Matrix mit komplexen Einträge und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ einer ihrer Eigenwerte. Für $i \geq 1$ definieren wir $b_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - \lambda I)^i)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $i \geq 0$ gilt $b_i \geq b_{i+1}$.

☐Wenn $b_{i+1} = b_i$ für irgendein i gilt, dann ist $b_{i+j} = b_i$ für alle $j \geq 0$.

Sei A eine Matrix mit komplexen Einträge und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ einer ihrer Eigenwerte. Für $i \geq 1$ definieren wir $a_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - \lambda I)^i)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Wenn $a_i = a_{i+1}$ für irgendein i gilt, dann ist $a_j = a_{j+1}$ für alle $j \geq i$.

☐Für alle $i \geq 0$ gilt $a_i \leq a_{i+1}$.

Sei A eine Matrix mit komplexen Einträge und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ einer ihrer Eigenwerte. Für $i \geq 1$ definieren wir $b_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - \lambda I)^i)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $i \geq 1$ gilt $b_i \geq b_{i+1}$.

☐Wenn $b_{i+1} = b_i$ für irgendein i gilt, dann ist $b_j = b_{j+1}$ für alle $j \geq i$.

Aufgabe 4

Seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐A_1 ist nilpotent von Ordnung 2.

☐A_2 ist nicht nilpotent.

☐$A_1 + A_2$ ist nilpotent von Ordnung 3.

☐$A_1 + A_3$ ist nicht nilpotent.

Seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$A_1 + A_3$ ist nicht nilpotent.

☐A_2 ist nicht nilpotent.

☐A_1 ist nilpotent von Ordnung 2.

☐$A_1 + A_2$ ist nilpotent von Ordnung 3.

Seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ A_2 ist nicht nilpotent.

□ A_1 ist nilpotent von Ordnung 2.

□ $A_1 + A_3$ ist nilpotent.

□ $A_1 + A_2$ ist nilpotent von Ordnung 2.

Seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ A_1 ist nilpotent von Ordnung 2.

□ A_2 ist nicht nilpotent.

□ $A_1 + A_2$ ist nilpotent von Ordnung 2.

□ $A_1 + A_3$ ist nicht nilpotent.

Aufgabe 5

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $\{(1,0,1,0),(2,2,-1,0)\}$ aufgespannte Unterraum. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + x_3,$

$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3 + x_4.$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ U und $[\{\varphi_1, \varphi_2\}]$ sind dual zueinander.

□ U und $[\{\varphi_1, \varphi_3\}]$ sind dual zueinander.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $\{(3,2,0,0),(-1,-2,2,0)\}$ aufgespannte Unterraum. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + x_3,$

$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3 + x_4.$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□U und $[\{\varphi_1, \varphi_3\}]$ sind dual zueinander.

□U und $[\{\varphi_1, \varphi_2\}]$ sind dual zueinander.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $\{(1, 2, -2, 0), (1, 0, 1, 0)\}$ aufgespannte Unterraum. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + x_3,$

$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3 + x_4.$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□U und $[\{\varphi_1, \varphi_2\}]$ sind dual zueinander.

□U und $[\{\varphi_1, \varphi_3\}]$ sind dual zueinander.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $\{(3, 2, 0, 0), (2, 2, -1, 0)\}$ aufgespannte Unterraum. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + x_3,$

$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3 + x_4.$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□U und $[\{\varphi_1, \varphi_3\}]$ sind dual zueinander.

□U und $[\{\varphi_1, \varphi_2\}]$ sind dual zueinander.