ONLINE-TEST 13

Aufgabe 1

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2 + 3x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐Die Funktion $s : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + 3x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum).

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 4x_2y_1 + 6x_2y_2 + 4x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 - y_1 + x_2 - y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐Die Funktion $s : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 - 2ix_1y_2 + 2ix_2y_1 + x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum).

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2 + 3x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1 + y_1 + x_2 - y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐Die Funktion $s : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + ix_1y_2 - ix_2y_1 + 2x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum).

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1 - y_1 + x_2 - y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐Die Funktion $s : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3ix_1y_2 + 3ix_2y_1 + x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum).

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 2

Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sodass $s((1,1),(1,-1)) = 2$, $s((-1,-1),(-1,-1)) = 4$ und $s((2,-2),(-2,2)) = -16$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

$s((1,0),(0,1)) =$ ☐.

$s((1,0),(1,0)) =$ ☐.

Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sodass $s((1,1),(1,-1)) = 6$, $s((-2,-2),(2,2)) = -32$ und $s((1,-1),(1,-1)) = 4$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

$s((1,0),(0,1)) =$ ☐.

$s((1,0),(1,0)) =$ ☐.

Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sodass $s((1,1),(1,-1)) = -2$, $s((-1,-1),(-1,-1)) = 8$ und $s((1,-1),(-2,2)) = -8$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

$s((1,0),(0,1)) =$ ☐.

$s((1,0),(1,0)) =$ ☐.

Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sodass $s((2,2),(1,-1)) = -12$, $s((-2,-2),(1,1)) = -8$ und $s((1,-1),(3,-3)) = 24$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

$s((1,0),(0,1)) =$ ☐.

$s((1,0),(1,0)) =$ ☐.

Aufgabe 3

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 - 2bx_1y_2 - 2bx_2y_1 + 4bx_2y_2$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $b > 0$.

◯ s ist kein Skalarprodukt für alle $b \in \mathbb{R}$.

◯ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $0 < b \leq 3$.

◯ alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1y_1 - 3bx_1y_2 - 3bx_2y_1 + 9bx_2y_2$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ s ist kein Skalarprodukt für alle $b \in \mathbb{R}$.

◯ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $b > 0$.

◯ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $0 < b \leq 5$.

◯ alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 5bx_1y_2 - 5bx_2y_1 + 25bx_2y_2$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ s ist kein Skalarprodukt für alle $b \in \mathbb{R}$.

◯ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $0 < b \leq 2$.

◯ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $b > 0$.

◯ alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 6bx_1y_2 - 6bx_2y_1 + 36bx_2y_2$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $0 < b \leq 1$.

◯ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $b > 0$.

◯ s ist kein Skalarprodukt für alle $b \in \mathbb{R}$.

◯alle obigen Aussagen sind falsch.

——— Aufgabe 4 ———

Sei $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{C}^n$. Betrachten Sie die Matrix $A = [v_1|\cdots|v_n]$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ $\det(A)^2 = 1$.

◯$\mathsf{tr}(A)^2 = 1$.

◯$\mathsf{tr}(A) = n$.

◯Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Matrix $A = [v_1|\cdots|v_n]$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ $\mathsf{tr}(A) = n$.

◯$\det(A) = 0$.

◯$|\det(A)| = 1$.

◯Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{C}^n$. Betrachten Sie die Matrix $A = [v_1|\cdots|v_n]$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ $\mathsf{tr}(A) = 0$.

◯$\det(A)^2 = 1$.

◯$\mathsf{tr}(A) = n$.

◯Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Matrix $A = [v_1|\cdots|v_n]$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ $\mathsf{tr}(A) = n$.

◯ $|\det(A)| = 1$.

◯ $\mathsf{tr}(A) = 0$.

◯ Alle obigen Aussagen sind falsch.

——— **Aufgabe 5** ———

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Mit s bezeichnen wir das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^4$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Funktion $t : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $t(v, w) = s(f(v), f(w))$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$, wenn f ein Isomorphismus ist. ◯ wahr ◯ falsch

---

Sei $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Mit s bezeichnen wir das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{C}^3$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Funktion $t : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ gegeben durch $t(v, w) = s(f(v), f(w))$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^3$, wenn f ein Isomorphismus ist. ◯ wahr ◯ falsch

---

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f : V \to \mathbb{R}^4$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Mit s bezeichnen wir das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^4$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Funktion $t : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $t(v, w) = s(f(v), f(w))$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf V, wenn f injektiv ist. ◯ wahr ◯ falsch

---

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $f : V \to \mathbb{C}^3$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Mit s bezeichnen wir das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{C}^3$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Funktion $t : V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben durch $t(v, w) = s(f(v), f(w))$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf V, wenn f injektiv ist. ◯ wahr ◯ falsch