KURZSKRIPT ZUR VORLESUNG LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE I IM WS 2017/18

1. Mengen und Zahlen

Eine Menge X besteht aus Elementen. X ist eine Teilmenge von Y, geschrieben $X \subset Y$, wenn jedes Element von X auch in Y liegt.

Definition 1.1. Seien X und Y Mengen.

- Die *Vereinigung* von X und Y ist definiert als $X \cup Y := \{a : a \in X \text{ oder } a \in Y\}$.
- Der *Durchschnitt* von X und Y ist definiert als $X \cap Y := \{a : a \in X \text{ und } a \in Y\}$.
- Die *Differenz* von X und Y ist definiert als $X - Y := X \setminus Y := \{a : a \in X \text{ und } a \notin Y\}$.
- Die *Potenzmenge* $P(X)$ von X ist die Menge aller Teilmengen von X.

Proposition 1.2. *Seien X, Y und Z Mengen. Dann gilt:*

- $X \cap Y = Y \cap X, X \cup Y = Y \cup X$ *("Kommutativität")*
- $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z), (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ *("Assoziativität")*
- $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

Definition 1.3. Seien X und Y Mengen. Das *kartesische Produkt* von X und Y ist die Menge $X \times Y := \{(a, b) : a \in X, b \in Y\}$ der geordneten Paare (a, b) von Elementen $a \in X$ und $b \in Y$.

Definition 1.4. Seien X und Y Mengen. Eine *Relation* R (zwischen den Elementen von X und den Elementen von Y) ist eine Teilmenge R von $X \times Y$. Für $(a, b) \in R$ schreiben wir auch aRb. Eine Teilmenge $R \subset X \times X$ wird auch als *Relation auf* X bezeichnet. Dann heißt R

- *reflexiv* $:\Leftrightarrow aRa \;\; \forall a \in X$
- *symmetrisch* $:\Leftrightarrow [\forall a, b \in X : aRb \Rightarrow bRa]$
- *transitiv* $:\Leftrightarrow [\forall a, b, c \in X : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc]$

R heißt *Äquivalenzrelation* $:\Leftrightarrow$ R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Für eine Äquivalenzrelation R schreibt man statt aRb auch $a \sim_R b$ ("a ist R-äquivalent zu b").

Definition 1.5. Sei R eine Äquivalenzrelation auf X und $a \in X$. Dann heißt $[a] := \{b \in X : aRb\}$ die *Äquivalenzklasse von a*.

Proposition 1.6. *Sei R eine Äquivalenzrelation auf X.*

- *Für $a, b \in X$ gilt entweder $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$.*
- $X = \dot{\bigcup}[a]$, *d.h. X ist die disjunkte Vereinigung der verschiedenen Äquivalenzklassen.*

Definition 1.7. Eine Relation $f \subset X \times Y$ heißt *Funktion* oder *Abbildung* von X nach Y $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in X \; \exists! \, b \in Y : (a, b) \in f$ ($\exists!$ bedeutet "es existiert genau ein"). Statt $(a, b) \in f$ schreiben wir auch $f(a) = b$ und wir nutzen die Notation $f : X \longrightarrow Y$ ("f ist eine Abbildung von X nach Y") sowie $a \mapsto f(a)$ ("das Element $a \in X$ wird auf $f(a)$ abgebildet").

Definition 1.8. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist f

- *injektiv* $:\Leftrightarrow \forall a, b \in X : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
- *surjektiv* $:\Leftrightarrow \forall c \in Y \; \exists a \in X : f(a) = c$
- *bijektiv* $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv

Definition 1.9. Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Die *Komposition* von g und f ist die Abbildung $g \circ f : X \longrightarrow Z$ mit $a \mapsto g(f(a))$ für $a \in X$. Wir sagen auch, dass "g nach f ausgeführt wird". Die Abbildung g heißt die *Umkehrabbildung* von $f :\Leftrightarrow Z = X$ und $g \circ f = id_X$ sowie $f \circ g = id_Y$.

Theorem 1.10. *Seien X und Y nichtleere Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

- *f ist injektiv $:\Leftrightarrow \exists\, g : Y \to X$ sodass $g \circ f = id_X$*
- *f ist surjektiv $:\Leftrightarrow \exists\, g : Y \to X$ sodass $f \circ g = id_Y$*
- *f ist bijektiv $:\Leftrightarrow \exists\, g : Y \to X$ sodass $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$*

Definition 1.11. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Die Menge

$$f(X) := \{f(a) : a \in X\} = \{b \in Y : \exists a \in X \text{ mit } f(a) = b\}$$

heißt *Bild* (oder Bildbereich oder Bildmenge oder Wertebereich von f). Die Elemente $a \in X$ mit $f(a) = b$ heißen *Urbilder* von $b \in Y$. Die Menge aller Urbilder von b wird mit $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\}) = \{a \in X : f(a) = b\}$ bezeichnet. Für $Z \subset Y$ ist $f^{-1}(Z) := \{a \in X : f(a) \in Z\}$.

Definition 1.12. Zwei Mengen X und Y sind *gleichmächtig* (oder von gleicher Kardinalität) $:\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $X \longrightarrow Y$. Eine Menge X heißt *abzählbar*, wenn sie gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist. Wenn X nicht abzählbar ist, heißt X *überabzählbar*.

Peano-Axiome:

(P1) Es gibt eine natürliche Zahl 1.
(P2) Es gibt eine Funktion S, die jeder Zahl $a \in \mathbb{N}$ eine Zahl $S(a)$ zuordnet.
(P3) 1 ist nicht von der Form $S(a)$ für irgendein a.
(P4) S ist injektiv: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$.
(P5) Für alle Aussagen A über natürliche Zahlen gilt: $[A(1)$ wahr und $\forall a \in \mathbb{N} : [A(a)$ wahr $\Rightarrow A(S(a))$ wahr$]] \Rightarrow \forall a : A(a)$ wahr.

Prinzip der vollständigen Induktion:
Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt:
Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N} : [A(n)$ wahr $\Rightarrow A(n+1)$ wahr$]$.
Dann ist $A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem 1.13. *Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit $M \neq \varnothing$. Dann existiert ein kleinstes Element in M, d.h. $\exists n_o \in M$ mit $n_o \leq a\, \forall a \in M$. Dieses Element ist eindeutig bestimmt.*

Lemma 1.14. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Proposition 1.15. *Seien X, Y zwei Mengen mit jeweils n Elementen und sei* $\mathrm{BijAbb}(X,Y)$ *definiert als die Menge der bijektiven Abbildungen von X nach Y. Dann ist* $|\mathrm{BijAbb}(X,Y)| = n!$.

Theorem 1.16. *Sei M eine endliche Menge mit $|M| = m \geq 0$ und sei $0 \leq k \leq m$. Sei ferner $\binom{m}{k}$ die Anzahl der Teilmengen von M mit genau k Elementen. Die Zahl $\binom{m}{k} \in \mathbb{N}$ heißt Binomialkoeffizient ("m über k").*

- *Für $k \geq 1$ gilt: $\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$.*
- *Für $m \geq k \geq 0$ gilt: $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \stackrel{k\geq 1}{=} \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{1\cdot\ldots\cdot k}$.*
- *Für alle m, k gilt: $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$.*

Theorem 1.17. *(Binomischer Lehrsatz): Für reelle (oder komplexe) Zahlen und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

Korollar 1.18. *Sei X eine endliche Menge und $|X| = n \geq 1$. Dann gilt:*

- $|P(X)| = 2^n$, *d.h. X hat genau 2^n Teilmengen.*
- *X hat genau 2^{n-1} Teilmengen mit gerader Anzahl an Elementen und genauso viele mit ungerader Anzahl an Elementen.*

Komplexe Zahlen:

Wir definieren auf der Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ folgende Addition und Multiplikation:

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

$$(a,b)(c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Insbesondere folgt dann $(0,1)^2 = -1$. Wir setzen $i := (0,1)$ und $a + bi := (a,b)$. Dann gilt:

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i = (ac-bd, ad+bc)$$

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ heißt a der *Realteil* von z, $a = Re(z)$, und b der *Imaginärteil* von z, $b = Im(z)$. Der *Betrag* von z ist definiert als

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Wir können $z \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten schreiben, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einen Winkel α im Intervall $[0, 2\pi[$, sodass

$$z = r\cos\alpha + ir\sin\alpha.$$

Um diese Darstellung von z zu erhalten, nutzen wir grundlegende trigonometrische Zusammenhänge im Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Auf dem Einheitskreis liegen auch die n-ten *Einheitswurzeln*, d.h. Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Diese haben die Form

$$z_{k,n} = 1 \cdot (\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}) \text{ für } k = 1, ..., n.$$

Lemma 1.19. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$ sowie $\varepsilon := z_{1,n}$. Dann gilt:*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{jk} = 0 \text{ und daher auch } \sum_{j=0}^{n-1} \cos\frac{2\pi}{n}j = 0 = \sum_{j=0}^{n-1} \sin\frac{2\pi}{n}j.$$

Korollar 1.20. *Sei X eine endliche Menge und $|X| = n \geq 1$. Dann ist die Anzahl der Teilmengen von X, deren Elementezahl durch 3 teilbar ist, gegeben durch*

$$\sum_{\substack{j=0 \\ 3|j}}^{n} \binom{n}{j} = \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} 2^n + 2, \ n \equiv 0 \ mod\ 6, \ d.h.\ 2 \mid n \text{ und } 3 \mid n \\ 2^n - 2, \ n \equiv 3 \ mod\ 6, \ d.h.\ 2 \nmid n \text{ und } 3 \mid n \\ 2^n + 1, \ n \equiv 1,5 \ mod\ 6, \ d.h.\ 2 \nmid n \text{ und } 3 \nmid n \\ 2^n - 1, \ n \equiv 2,4 \ mod\ 6, \ d.h.\ 2 \mid n \text{ und } 3 \nmid n \end{cases}$$

2. Vektorräume

Definition 2.1. Ein *Ring* ist eine Menge R mit zwei Abbildungen $+ : R \times R \to R, (a,b) \mapsto a+b$ und $\cdot : R \times R \to R, (a,b) \mapsto a \cdot b$ und zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 in R mit $0 \neq 1$, sodass gilt:

(R1)
- $\forall a \in R\, \exists b \in R : a+b = 0 = b+a$ ($b =: -a$ ist inverses Element zu a bezüglich $+$)
- $\forall a \in R : a + 0 = a = 0 + a$ (0 ist neutrales Element bezüglich $+$)
- $\forall a,b \in R : a+b = b+a$ ($+$ ist kommutativ)
- $\forall a,b,c \in R : (a+b)+c = a+(b+c)$ ($+$ ist assoziativ)

(R2)
- $\forall a \in R : a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ (1 ist neutrales Element bezüglich $\cdot$)
- $\forall a,b,c \in R : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ($\cdot$ ist assoziativ)

(R3)
- $\forall a,b,c \in R : a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- $\forall a,b,c \in R : (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ ($+, \cdot$ sind distributiv)

Der Ring R ist ein *kommutativer Ring*, wenn zusätzlich gilt:

$$\forall a,b \in R : a \cdot b = b \cdot a \qquad (\cdot \text{ ist kommutativ})$$

Ein kommutativer Ring K ist ein *Körper*, wenn zusätzlich gilt:

$$\forall a \in K^* := K - \{0\}\ \exists b \in K^* : ab = 1 (= ba) \qquad (b =: a^{-1} \text{ ist inverses Element zu } a \text{ bezüglich } \cdot)$$

Lemma 2.2. *Sei K ein Körper, dann gilt:*

- 0 *und* 1 *sind eindeutig bestimmt als neutrale Elemente bezüglich $+$ und $\cdot$. Ebenso sind $-a$ und a^{-1} eindeutig bestimmt.*
- $\forall a \in K : a \cdot 0 = 0$
- $\forall a,b \in K : a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ *oder* $b = 0$
- $\forall a,b \in K : a \cdot (-b) = -ab = (-a)b$ *und* $(-a)(-b) = ab$

Definition 2.3. Sei K ein Körper. Eine Menge V heißt *K-Vektorraum* (oder Vektorraum über K), wenn es Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : K \times V \to V$ und ein ausgezeichnetes Element $0 \in V$ gibt, sodass gilt:

(V1)
- $\forall x \in V\, \exists y \in V : x+y = 0 = y+x$ ($y =: -x$ ist inverses Element zu x bezüglich $+$)
- $\forall x \in V : x + 0 = x = 0 + x$ (0 ist neutrales Element bezüglich $+$)
- $\forall x,y \in V : x+y = y+x$ ($+$ ist kommutativ)
- $\forall x,y,z \in V : x+(y+z) = (x+y)+z$ ($+$ ist assoziativ)

(V2)
- $\forall x \in V\, \forall \lambda, \mu \in K : \lambda(\mu x) = \underbrace{(\lambda\mu)}_{inK} x$
- $\forall x \in V\, \forall \lambda, \mu \in K : \underbrace{(\lambda + \mu)}_{inK} x = \lambda x \underbrace{+}_{inV} \mu x$
- $\forall x,y \in V\, \forall \lambda \in K : \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
- $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$

Die Elemente von V heißen *Vektoren*, die von K heißen *Skalare* oder Koeffizienten.

Definition 2.4. Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ eine Teilmenge. U heißt *Untervektorraum* (oder *Unterraum*) von V :$\Leftrightarrow$ U ist ein K-Vektorraum und die Operationen auf U sind die Einschränkungen der Operationen auf V:

- $(+ : U \times U \to U) = (+ : V \times V \to V) \downarrow_{U \times U}$ (oder $|_{U \times U}$: Einschränkung)
- $(\cdot : K \times U \to U) = (\cdot : K \times V \to V) \downarrow_{K \times U}$

Proposition 2.5. *(Unterraumkriterium) Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ mit $U \neq \emptyset$. Dann ist U ein Untervektorraum von V* $\Leftrightarrow \forall a,b \in U\, \forall \lambda, \mu \in K : \lambda a + \mu b \in U$

$$\Leftrightarrow \forall a,b \in U : a+b \in U \text{ und } \forall \lambda \in K\, \forall a \in U : \lambda a \in U.$$

Definition 2.6. Sei V ein K-Vektorraum, I eine Menge und $M = \{v_i : i \in I\}$ eine Menge von Vektoren in V.

- Ein Vektor $a \in V$ ist eine *Linearkombination* der v_i (lässt sich aus den v_i linear kombinieren), wenn gilt:
$$\exists n \in \mathbb{N}\, \exists i_1, \dots, i_n \in I\, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ v_{i_j}.$$
- Die Menge $[M]$ aller Vektoren in V, die sich aus endlich vielen Elementen von M linear kombinieren lassen, also
$$[M] := \{a \in V : \exists n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in I, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ v_{i_j}\},$$
heißt *lineare Hülle* von M oder der von M *erzeugte* oder *aufgespannte* Unterraum. Die Menge M heißt *Erzeugendenssystem* von $[M]$. Für $M = \varnothing$ ist $[M] := \{0\}$.

Lemma 2.7. *Für jede Menge $M \subset V$ gilt: $[M]$ ist ein Unterraum von V.*

Proposition 2.8. *Sei $M \subset V$ und $[M]$ die lineare Hülle von M. Dann gilt:*
$$[M] = \bigcap_{\substack{M \subset U \\ U \text{ Unterraum}}} U$$
d.h. $[M]$ ist der bezüglich Inklusion kleinste Unterraum von V, der M enthält.

Ein *Polynom* mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R ist eine endliche Folge
$$(a_0, a_1, \dots, a_n) = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$$
von Elementen in R, geschrieben als $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ (mit einem Symbol x) oder auch $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. Das Element $a_n \neq 0$ heißt *Höchstkoeffizient* (oder *Leitkoeffizient*) und die natürliche Zahl n heißt *Grad* von p.

Definition 2.9. Sei V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_n \in V$. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißen *linear abhängig* $:\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n - \{(0, \dots, 0)\}$, sodass $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. Sonst heißen die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ *linear unabhängig.*

Lemma 2.10.
- *Sei $n > 1$ und seien die Vektoren $v_1 \dots, v_n$ linear abhängig. Dann gibt es ein $j \in \{1, ..., n\}$, sodass v_j eine Linearkombination der v_i für $i \neq j$ ist.*
- *Sei $n \geq 1$ und seien die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig. Sei u ein weiterer Vektor. Dann sind die Vektoren $v_1, \dots, v_n, u$ linear abhängig.*

Definition 2.11. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Menge $M = \{b_i : i \in I\}$ von Vektoren in V bildet eine *Basis* von V: $\Leftrightarrow V = [M]$ und für alle echten Teilmengen $M' = \{b_i : i \in I'\} \subsetneq M$ gilt $[M'] \subsetneq V$.

Theorem 2.12. *Sei V ein K-Vektorraum und $M := \{b_i : i \in I\}$ eine Menge von Vektoren. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
- *M ist eine Basis von V.*
- *Jedes $a \in V$ ist eine Linearkombination von Vektoren in M, und die vorkommenden Vektoren und die Koeffizienten sind (für festes a) eindeutig bestimmt.*
- *Die Vektoren in M sind linear unabhängig, d.h. jede endliche Teilmenge ist linear unabhängig, und $[M] = V$.*

Eine Basis ist also ein Erzeugendensystem aus linear unabhängigen Vektoren.

Proposition 2.13. *Sei V ein K-Vektorraum, der von einer abzählbaren Menge erzeugt wird: $V = [\{v_1, v_2, v_3, \dots\}]$. Dann besitzt V eine Basis, die in der Menge $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ enthalten ist.*

Definition 2.14. Seien V und W K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine Abbildung. f heißt *K-linear* (oder Vektorraum-Homomorphismus)

$$:\Leftrightarrow \forall a, b \in V : f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$\text{und } \forall a \in V, \lambda \in K : f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$$

f heißt *Vektorraum-Isomorphismus*: $\Leftrightarrow$ f ist ein bijektiver Vektorraum-Homomorphismus. Die Vektorräume V und W heißen dann *isomorph* und wir schreiben $V \simeq W$.

Lemma 2.15. *Sei $f : V \longrightarrow W$ ein Vektorraum-Isomorphismus. Dann ist $f^{-1} : W \longrightarrow V$ auch ein Vektorraum-Isomorphismus.*

Korollar 2.16. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein Vektorraum-Isomorphismus $\varphi : K^n \xrightarrow{\simeq} V$. (Hier ist $K^0 := \{0_v\}$.)*

Lemma 2.17. *Sei $\{v_i : i \in I\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren und sei*

$$w = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_n\}} \lambda_i v_i$$

mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$. Dann ist für $j \in \{i_1, \dots, i_n\}$ die Menge $(\{v_i : i \in I\} - \{v_j\}) \cup \{w\}$ linear unabhängig und erzeugt dieselbe lineare Hülle: $[\{v_i : i \in I\}] = [\{v_i : i \in I, i \neq j\} \cup \{w\}]$.

Theorem 2.18. *(Austauschsatz von Steinitz): Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ und sei $\{v_1, \dots, v_l\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren. Dann gilt $l \leq n$ und V hat eine Basis $\{v_1, \dots, v_l, c_1, \dots, c_{n-l}\}$ mit $\{c_1, \dots, c_{n-l}\} \subset \{b_1, \dots, b_n\}$.*

Korollar 2.19. *Wenn V eine Basis mit n Elementen hat, dann hat jede Basis von V genau n Elemente und die Vektoren in einer Menge mit $l > n$ Elementen sind stets linear abhängig.*

Definition 2.20. Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Dann heißt n die *K-Dimension* von V. Wir schreiben $\dim_K V = n$ (oder $\dim V = n$). Falls $V = \{0\}$, dann ist $\dim V = 0$. Wenn V nicht endlich erzeugt ist, schreiben wir $\dim_K V = \infty$.

Lemma 2.21. *Seien U und V K-Vektorräume und $U \xrightarrow{\varphi} V$ ein Vektorraum-Isomorphismus. Dann gilt $\dim U = \dim V$. Genauer gilt: φ bildet eine Basis von U auf eine Basis von V ab.*

3. Lineare Abbildungen und Matrizen

Sei K ein Körper und seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_l$. Sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{l1}w_l \\ \varphi(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{l2}w_l \\ &\vdots \\ \varphi(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{ln}w_l \end{aligned}$$

d.h. für $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\varphi(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{lj}w_l$ mit $a_{ij} \in K$. Diese Information können wir wie folgt darstellen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,l \leftarrow \text{ Zeilenindex} \\ j=1,\dots,n \leftarrow \text{ Spaltenindex}}}$$

A heißt die *darstellende Matrix* von φ bezüglich der Basen $v_1, \dots, v_n$ von V und $w_1, \dots, w_l$ von W. Sei $v \in V$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ für $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$. Wir definieren

$$\begin{aligned} A \cdot x &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{pmatrix}_{l \times n} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + & \dots & +a_{1n}\lambda_n \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + & \dots & +a_{2n}\lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1}\lambda_1 + a_{l2}\lambda_2 + & \dots & +a_{ln}\lambda_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_l \end{pmatrix}_{l \times 1} \end{aligned}$$

Dann gilt: $\varphi(v) = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_l w_l$, d.h. die Matrix A legt die lineare Abbildung φ fest.

Definition 3.1. Sei K ein Körper. Die Menge der $l \times n$-Matrizen mit l Zeilen und n Spalten sowie Einträgen in K wird mit $\mathrm{Mat}(l \times n, K)$ bezeichnet.

Theorem 3.2. *Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $v_1, \dots, v_n$ und W ein l-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $w_1, \dots, w_l$ für $l, n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung*

$$\{\varphi : V \longrightarrow W \mid \varphi \textit{ K-linear } \} \longrightarrow \mathrm{Mat}(l \times n, K),$$

die der linearen Abbildung φ die darstellende Matrix bezüglich obiger Basen zuordnet, bijektiv.

Definition 3.3. Seien V und W K-Vektorräume. Die Menge der K-linearen Abbildungen von V nach W wird mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ oder $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet (siehe Definition 2.14).

Proposition 3.4.

- $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ *ist ein K-Vektorraum mit Nullvektor* $0(x) := 0\ \forall x \in V$ *sowie*

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \textit{ und } (\lambda f)(x) := \lambda f(x)\ \forall x \in V.$$

  Wenn $\dim V = n$ *und* $\dim W = l$, *dann ist* $\dim \mathrm{Hom}_K(V, W) = n \cdot l$.
- $\mathrm{Mat}(l \times n, K)$ *ist ein K-Vektorraum mit Nullvektor* $(0)_{l \times n}$ *sowie*

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{ln} + b_{ln} \end{pmatrix} \textit{ und } \lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{ln} \end{pmatrix}$$

- *Die Bijektion in Theorem 3.2 definiert einen (von der Wahl der Basen abhängigen) Vektorraumisomorphismus.*

Für zwei Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(l \times n, K)$ und $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ definieren wir das Produkt $A \cdot B := (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}(l \times m, K)$ durch $c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Proposition 3.5. *Die Komposition von linearen Abbildungen entspricht dem Produkt von Matrizen, genauer gesagt: Seien U, V und W K-Vektorräume mit Basen $u_1, \dots, u_m$, $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_l$ und seien $f : U \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen, sodass bezüglich dieser Basen f die darstellende Matrix B hat und g die darstellende Matrix A. Dann ist $A \cdot B$ die darstellende Matrix der linearen Abbildung $g \circ f : U \longrightarrow W$.*

Korollar 3.6. *Bezüglich einer festen Basis $v_1, \dots, v_n$ von V ist $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ isomorph zu $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ als K-Vektorraum und als Ring.*

4. Elementarmatrizen und lineare Gleichungssysteme

Seien V und W Vektorräume und sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Sei zudem $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\mathcal{C}$ eine Basis von W und sei A die darstellende Matrix von φ bezüglich dieser Basen. Wie verändert sich die Matrix A, wenn wir andere Basen von V bzw. W wählen? Sei also $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von V und $\mathcal{C}'$ eine weitere Basis von W. Wir schreiben die lineare Abbildung φ als Komposition

$$V \xrightarrow{\mathrm{id}_V} V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\mathrm{id}_W} W\ .$$

Sei nun T die darstellende Matrix von id_V bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}$ und sei S die darstellende Matrix von id_W bezüglich der Basen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$.

$$\underset{\text{Basis } \mathcal{B}'}{V} \xrightarrow[T]{\mathrm{id}_V} \underset{\text{Basis } \mathcal{B}}{V} \xrightarrow[A]{\varphi} \underset{\text{Basis } \mathcal{C}}{W} \xrightarrow[S]{\mathrm{id}_W} \underset{\text{Basis } \mathcal{C}'}{W}\ .$$

Dann ist $S \cdot A \cdot T$ die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$. Die Matrizen T und S werden auch *Basistransformationen* oder *Basiswechselmatrizen* genannt. Im Folgenden fragen wir uns, wie wir durch Basistransformationen eine möglichst einfache darstellende Matrix von φ finden können.

Seien $n, p \in \mathbb{N}$ und $1 \le i, j \le n$. Sei zudem K ein Körper mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$ und $A \in \mathrm{Mat}(p \times n, K)$. Wir definieren die folgenden Elementarmatrizen in $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$:

- Elementare Umformung 1:

$$S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } A \cdot S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & \lambda a_{pi} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

- Elementare Umformung 2:

$$\text{Falls } i < j \text{ sei } Q_i^j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & 1 & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei außerhalb der Diagonalen alle Einträge 0 sind bis auf den Eintrag $(j, i) = 1$.

$$\text{Falls } i > j \text{ sei } Q_i^j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & 1 & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei außerhalb der Diagonalen alle Einträge 0 sind bis auf den Eintrag $(j, i) = 1$.

$$\text{Wir erhalten in beiden Fällen: } A\cdot Q_i^j = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pi}+a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ i\text{-Spalte} \end{array}$$

$$\text{Analog definieren wir: } Q_i^j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } Q_i^j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- Elementare Umformung 3:

$$P_i^j = P_j^i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei außerhalb der Diagonalen alle Einträge 0 sind bis auf die Einträge $(j,i) = (i,j) = 1$.

$$\text{Wir erhalten für } i < j : A\cdot P_i^j = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pi} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \qquad & \uparrow \\ \text{i-te Spalte} & & \text{j-te Spalte} \end{matrix} \end{array}$$

Theorem 4.1. *(Gaußsches Eliminationsverfahren für Matrizen)*
Sei $A \in \mathrm{Mat}(p \times n, K)$. *Dann gibt es endlich viele elementare Umformungen* $T_1, \dots, T_l$, *sodass*

$$C := T_l \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot A = \begin{pmatrix} * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

d.h. $c_{ij} = 0$ *für* $i > j$ *und* $*$ *steht für beliebige Einträge aus* K. *Diese Form heißt* Zeilenstufenform.

Korollar 4.2. *Sei* $\varphi : V \longrightarrow W$ *eine lineare Abbildung mit* $\dim V = n$ *und* $\dim W = p$. *Dann existiert in* V *eine Kette von Unterräumen* $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ *mit* $\dim V_j = j$, *und es existiert in* W *eine Kette von Unterräumen* $W_0 = \{0\} \subset W_1 \subset \dots \subset W_p = W$ *mit* $\dim W_j = j$, *sodass* $\varphi(V_i) \subset W_i$ *für alle* $i \le \min\{n, p\}$.

Definition 4.3. Sei $A \in \mathrm{Mat}(p \times n, K)$. Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ heißt *Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems* $Ax = 0$.

Lemma 4.4. *Die Lösungsmenge von $Ax = 0$ ist ein Untervektorraum von K^n. Wenn A die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $\varphi : K^n \longrightarrow K^p$ bezüglich der Standardbasen ist, dann ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$ genau das Urbild $\varphi^{-1}(0_{K^p})$ des Nullvektors 0_{K^p} im Zielbereich, d.h. die Menge aller Vektoren in K^n, die auf 0_{K^p} abgebildet werden.*

Definition 4.5. Sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W (nicht notwendig endlich dimensional). Die Menge $\varphi^{-1}(0_W) = \{x \in V : \varphi(x) = 0_W\}$ heißt *Kern* von φ. Wir schreiben $\mathrm{Kern}(\varphi)$.

Lemma 4.6. *Sei T ein Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen. Dann gilt* $\mathrm{Kern}(TA) = \mathrm{Kern}(A)$. *Die linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $TAx = 0$ haben denselben Lösungsraum.*

Korollar 4.7. *Sei $A \in \mathrm{Mat}(l \times n, K)$ und sei T ein Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen, sodass $TA \in \mathrm{Mat}(l \times n, K)$ in Zeilenstufenform ist, wobei p Zeilen ungleich null sind und $l - p$ Zeilen Nullzeilen sind. Dann hat der Lösungsraum U von $Ax = 0$ die Dimension $n - p$. Genauer können die $n - p$ Variablen x_j, wobei der Spaltenindex j nicht zu einer Zeile ungleich null gehört, frei gewählt werden, während die anderen p Variablen durch die zur entsprechenden Zeile gehörende Gleichung bestimmt sind.*

5. Anwendungen des Gauss-Algorithmus

5.1. **Erste Anwendung.**

Theorem 5.1. *Eine Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ *ist genau dann invertierbar, wenn sie ein Produkt von Elementarmatrizen in* $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ *ist.*

Korollar 5.2. *Sei* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ *mit Zeilenstufenform* $C := T_l \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot A = \begin{pmatrix} c_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$.
Dann ist A *invertierbar* $\Leftrightarrow c_{11}, \ldots, c_{nn}$ *sind alle* $\neq 0$.

Definition 5.3. Eine *Gruppe* G ist eine Menge mit einer Abbildung $* : G \times G \to G, (g,h) \mapsto g*h$, sodass gilt:

$$\exists e \in G : e * g = g * e = g \ \forall g \in G \ (e \text{ ist neutrales Element})$$
$$\forall g \in G \, \exists h \in G : g * h = h * g = e \ (h \text{ ist inverses Element zu } g, \text{ Bezeichnung } h =: g^{-1})$$
$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3) \ (* \text{ ist assoziativ})$$

G heißt *abelsche Gruppe* (oder *kommutativ*) $:\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G : g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

Definition 5.4. Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K wird mit $\mathrm{GL}(n, K)$ oder $\mathrm{GL}_n(K)$ bezeichnet und heißt die *allgemeine lineare Gruppe.*

5.2. **Zweite Anwendung.**

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$. Wir betrachten Vektoren $v_1, \ldots, v_q \in V$ sowie die Koordinaten a_{ij} der v_j bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, d.h. $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$. Wir definieren die Matrix $A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times q, K)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $v_1, \ldots, v_q$ sind linear unabhängig.
- $q \le n$ und A hat Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} c_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{qq} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ mit allen $c_{11}, \ldots, c_{qq} \neq 0$.

5.3. **Dritte Anwendung.**

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$. Wir betrachten Vektoren $v_1, \ldots, v_q \in V$ und suchen eine Basis von $U := [\{v_1, \ldots, v_q\}] \subseteq V$. Dazu betrachten wir die Koordinaten b_{ij} der v_i bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, d.h. $v_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} b_j$. Wir definieren die Matrix $B := (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}(q \times n, K)$, sodass der Koordinatenvektor von v_i bezüglich $\mathcal{B}$ die i-te Zeile von B darstellt. Durch Anwendung des Gauß-Algorithmus erhalten wir die Zeilenstufenform C von B. Die p Nichtnullzeilen von C ($p \le q, n$) beschreiben die Koordinaten von p Vektoren in V bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Wir nennen diese p Vektoren $u_1, \ldots, u_p$. Diese Vektoren bilden eine Basis von U.

5.4. **Vierte Anwendung.**

Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume und sei $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{C} := \{w_1, \ldots w_l\}$ eine Basis von W. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- φ ist ein Isomorphismus.
- $n = l$ und die darstellende Matrix von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ist invertierbar.
- $n = l$ und die darstellende Matrix von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ hat die Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} c_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$ mit allen $c_{11}, \ldots, c_{nn} \neq 0$.

6. Bild und Rang einer linearen Abbildung, Gauss-Normalform

Definition 6.1. Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Das *Bild* von φ ist

$$\varphi(V) = \mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(x) : x \in V\}.$$

Seine Dimension heißt der *Rang* von φ. Wir schreiben $\mathrm{Rang}(\varphi)$ oder $\mathrm{rg}(\varphi)$.

Theorem 6.2. *(Dimensionsformel für Kern und Bild): Sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und* $\dim V < \infty$. *Dann ist* $\dim V = \dim \mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Rang}(\varphi)$.

Definition 6.3. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(p \times q, K)$. Die zu A *transponierte Matrix* ${}^{\mathrm{t}}A = A^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{tr}} \in \mathrm{Mat}(q \times p, K)$ hat die Einträge a_{ji}, d.h. der (i,j)-te Eintrag ist a_{ji}.

Definition 6.4. Sei $A \in \mathrm{Mat}(p \times q, K)$. Der Rang von A wird auch als *Spaltenrang* von A bezeichnet. Der Rang von A^{tr} heißt auch *Zeilenrang* von A.

Theorem 6.5. *Der Zeilenrang einer Matrix stimmt mit dem Spaltenrang überein. Der von den Zeilen aufgespannte Vektorraum hat dieselbe Dimension wie der von den Spalten aufgespannte Vektorraum.*

Korollar 6.6. *Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(p \times q, K)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$
- $\exists\, \varphi : K^q \longrightarrow K^p$ linear, sodass A und B bezüglich geeigneter Basen in K^q und K^p darstellende Matrizen von φ sind.
- $\exists S \in \mathrm{GL}(p, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(q, K)$, sodass $B = SAT^{-1}$.
- $\exists S, S' \in \mathrm{GL}(p, K)$ und $T, T' \in \mathrm{GL}(q, K)$ und $r \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$SAT^{-1} = S'B(T')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} =: C$$

  und C hat r Einträge gleich 1.

In diesem Fall nennt man A und B *äquivalent*. C ist die *Gauß-Normalform* von A und von B.

7. Summen und Quotienten von Vektorräumen

Definition 7.1. Sei V ein K-Vektorraum mit Untervektorräumen X und Y. Die *Summe* $X+Y$ ist die lineare Hülle der Vereinigung beider Mengen, d.h. $X+Y := [X \cup Y]$. Die Summe $X+Y$ heißt *direkte Summe*, wenn $X \cap Y = \{0\}$. Wir schreiben $X \oplus Y$.

Lemma 7.2.

- $X + Y = \{v \in V \mid \exists x \in X \, \exists y \in Y : v = x + y\}$
- *Die Summe* $X+Y$ *ist direkt* $\Leftrightarrow \forall v \in X+Y \; \exists! x \in X \; \exists! y \in Y : v = x + y$.

Theorem 7.3. *(Dimensionsformel für Summe und Schnitt): Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Unterräumen X und Y. Dann gilt:*

$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Insbesondere gilt für direkte Summen:

$$\dim(X \oplus Y) = \dim X + \dim Y.$$

Korollar 7.4. *Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $X \subset V$ ein Unterraum. Dann existiert ein Unterraum $Y \subset V$, sodass $V = X \oplus Y$. Der Unterraum Y wird oft ein* Komplement *von X genannt.*

Sei nun V ein nicht notwendig endlich dimensionaler K-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Sei $\sim$ die Relation auf V, die definiert ist durch $v_1 \sim v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$.

Lemma 7.5. *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen $\{[v] : v \in V\}$ ist ein K-Vektorraum mit Nullvektor $[0]$, Addition $[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2]$ und Skalarmultiplikation $\lambda \cdot [v] := [\lambda v]$ für $\lambda \in K$.*

Definition 7.6. Die Menge der Äquivalenzklassen $\{[v] : v \in V\}$ mit der obigen Vektorraumstruktur heißt *Quotientenvektorraum.* Wir schreiben V/U ("V modulo U") und $[v] = v + U$.

Proposition 7.7. *Sei V ein K-Vektorraum und U ein Unterraum. Die Restklassenabbildung $\pi : V \longrightarrow V/U$ mit $v \mapsto [v]$ ist ein surjektiver Vektorraumhomomorphismus mit* $\operatorname{Kern}(\pi) = U$.

Proposition 7.8. *Seien V und W K-Vektorräume und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann induziert f einen Isomorphismus $V/\operatorname{Kern}(f) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im}(f)$.*

Korollar 7.9. *Seien V und W K-Vektorräume und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann sind die K-Vektorräume V und $\operatorname{Kern}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ isomorph.*