Version A

Multiple choice (30 Punkte)

Hier sind keine Begründungen gefragt. Es gibt einen Punkt für jede richtige Antwort, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die Gesamtpunktzahl einer Aufgabe ist größer oder gleich null.

1. Sei $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Wenn f eine reflexive Relation ist, dann ist f $\mathbb{R}$-linear.	○	○
Wenn f $\mathbb{R}$-linear ist, dann ist f eine symmetrische Relation.	○	○
Wenn $f(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f eine transitive Relation.	○	○
Wenn $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f $\mathbb{R}$-linear.	○	○
Wenn f $\mathbb{R}$-linear ist, dann ist $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	○	○

2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Die Vektoren $x, x+1, x^2+1$ sind linear unabhängig im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}[x]$.	○	○
Die Vektoren $\sin(x), \cos(x)$ sind linear abhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.	○	○
Die Vektoren $(i, -i), (-1, 1)$ bilden eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^2$.	○	○
Die Vektoren $i, i+1$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$.	○	○
Es gibt unendlich viele linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathbb{Z}_2[x]$.	○	○

3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Jede Abbildung $\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ ist $\mathbb{Z}_2$-linear.	○	○
Die Abbildung $\mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ mit $x \mapsto x^3 - x$ ist $\mathbb{Z}_3$-linear.	○	○
Jeder $\mathbb{Z}_3$-Vektorraum der Dimension drei hat neun Elemente.	○	○
Jeder $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension eins hat unendlich viele Elemente.	○	○
Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{Q}$-linear.	○	○

4. Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,-1,1,0), v_3 = (1,0,-1,0), v_4 = (0,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^4$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Die Vektoren $v_1, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ sind linear unabhängig.	○	○
Die Vektoren $v_1 + v_2, v_2 - v_3, v_3, v_4 + 2v_3$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$.	○	○
Es gibt 3-dimensionale Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^4$ mit $U \cap V \neq \{0\}$, $U + V \neq \mathbb{R}^4$.	○	○
Es gibt 3-dimensionale Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^4$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$.	○	○
Es gibt 3-dimensionale Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^4$ mit $U \cup V = \mathbb{R}^4$.	○	○

5. Seien U und V endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit festen Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Für φ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ sei ${}_{\mathcal{C}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ die darstellende Matrix von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Für $\varphi, \psi \in \mathrm{Fun}(U, U)$ gilt: Wenn $\varphi \circ \psi$ $\mathbb{K}$-linear ist, ist φ oder ψ $\mathbb{K}$-linear.	○	○
Für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ gilt: ${}_{\mathcal{B}}[\psi \circ \varphi]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[\psi]_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$.	○	○
Für $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ ist das Produkt ${}_{\mathcal{C}}[\psi]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{C}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ immer definiert.	○	○
Wenn $\dim(U) = \dim(V) = n$, gibt es $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ mit ${}_{\mathcal{C}}[\varphi]_{\mathcal{B}} = E_n$.	○	○
Für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ gilt: Wenn $\varphi \circ \varphi = 0$, dann ist $\varphi = 0$.	○	○

6. Seien $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sowie $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ reelle Matrizen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Der Eintrag e_{ij} von $E = A + B^2$ ist $a_{ij} + b_{ij}^2$.	○	○
Für $i \neq j$ und $F = BA - A + 7E_n$ ist $f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} - a_{ij}$.	○	○
Der Eintrag g_{12} von $G = CD$ ist 23.	○	○
Der Eintrag h_{21} von $H = D^2$ ist 3.	○	○
Wenn $x \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $Dx = 0$ erfüllt, dann ist x der Nullvektor.	○	○