Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 13.12.2017
Aufgabenblatt 8

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
   (i) Seien u, v und w Vektoren in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit $\alpha, \gamma \neq 0$ und $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Dann folgt, dass $[\{u, v\}] = [\{v, w\}]$.
   (ii) Wenn die drei Vektoren $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{K}^4$ linear abhängig sind, sind auch die Vektoren $(a_2, a_1, a_4), (b_2, b_1, b_4), (c_2, c_1, c_4) \in \mathbb{K}^3$ linear abhängig.
   (iii) Wenn die drei Vektoren $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{K}^4$ linear unabhängig sind, sind auch die Vektoren $(a_2, a_1, a_4), (b_2, b_1, b_4), (c_2, c_1, c_4) \in \mathbb{K}^3$ linear unabhängig.

2. Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \geq 3)$ linear unabhängige Vektoren.
   (i) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1+v_2, v_1-v_2, v_1-2v_2+v_3$ linear unabhängig sind. Sind auch die Vektoren $v_1 + v_2 - 3v_3, v_1 + 3v_2 - v_3, v_2 + v_3$ linear unabhängig?
   (ii) Für $1 \leq k \leq n$ definieren wir $w_k := c_k v_k + v_1$ mit $c_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $c_1 \neq -1$.
   (iii) Seien $u_1, \ldots, u_m \in V$ linear unabhängig mit $[\{v_1, \ldots, v_n\}] \cap [\{u_1, \ldots, u_m\}] = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ linear unabhängige Vektoren sind.

3. Sei $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Funktion, die jeden Punkt an der durch die Vektoren $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ aufgespannten Ebene spiegelt. Sei $W := [\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (-2, -3, 1)\}]$.
   (i) $(*)$ Bestimmen Sie $g((x, y, z))$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ist g eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung?
   (ii) $(*)$ Finden Sie eine Basis von W und skizzieren Sie die Mengen W und $g(W)$.
   (iii) $(*)$ Zeigen Sie, dass $g(W)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie eine Basis von $g(W)$.

4. Bestimmen Sie eine Basis für die folgenden komplexen Vektorräume.
   (i) $\{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid a = c\} \subset \mathbb{C}^3$
   (ii) $[\{x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1\}] \subset \mathbb{C}[x]$
   (iii) $\{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele $x \in \mathbb{C}\} \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind.
   (i) $(*)$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := a \cdot x + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
   (ii) $(*)$ $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) := \overline{x}$. Ist f auch $\mathbb{C}$-linear?
   (iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x \cdot y - x$.
   (iv) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y, z) := (2x, y + z)$.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 19./20.12.2017. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718