Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 10.01.2018
Aufgabenblatt 10

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Sei $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ mit Vektoren $b_1 := (1, i)$ und $b_2 := (0, i)$ durch die darstellende Matrix $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & i \end{pmatrix}$ gegeben ist.
   (i) $(*)$ Bestimmen Sie $f(e_1)$ und $f(e_2)$, wobei e_1 und e_2 die Einheitsvektoren in $\mathbb{C}^2$ sind. Entscheiden Sie auch, ob die Abbildung f bijektiv ist.
   (ii) $(*)$ Entscheiden Sie, ob es eine Basis von $\mathbb{C}^2$ gibt, bezüglich derer die darstellende Matrix der Abbildung f die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat.
   (iii) $(*)$ Sei $g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $g((x, y)) := x + (1 + i)y$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von g sowie die darstellende Matrix der Komposition $g \circ f$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^2$ und der Basis $\mathcal{C} := \{i\}$ von $\mathbb{C}$.
2. Bestimmen Sie, sofern definiert, $A + B$, AB, BA, A^2, B^2, $(AB)^2$ und $(BA)^2$.
   (i) $(*)$ Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$.
   (ii) $(*)$ Seien $A = \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{C}$.
   (iii) Seien $A = \begin{pmatrix} [0] & [1] \\ [2] & [2] \\ [4] & [3] \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} [2] & [0] & [3] \\ [5] & [6] & [4] \end{pmatrix}$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}_7$.
3. Gegeben sind $g : \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ und $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{g}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \qquad a + bi \overset{h}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
   (i) Zeigen Sie, dass g und h injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind.
   (ii) Zeigen Sie, dass $h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und folgern Sie, dass $h(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ein Körper ist. Gilt dasselbe auch für die Abbildung g?
4. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) Wenn $A^2 = 0$, dann ist $A = 0$.
   (ii) Wenn $AB = 0$, dann hat A oder B einen Eintrag, der gleich null ist.
   (iii) $AX = XA$ für jedes $X \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ genau dann, wenn $A = \lambda E_n$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (iv) Wenn $Av = Bv$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$, dann ist $A = B$.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 16./17.01.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718