Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 24.01.2018
Aufgabenblatt 12

**Aufgaben zur Vorlesung:**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1**

1. Wir betrachten die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
   (i) ($*$) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform $B$ von $A$ und finden Sie eine invertierbare Matrix $S$ mit $SA = B$.
   (ii) ($*$) Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^5$ die Zeilen von $A$. Bestimmen Sie eine $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{B}$ von $[\{z_1, z_2, z_3\}]$, sodass jeder Vektor in $\mathcal{B}$ mindestens einen Null-Eintrag hat.
   (iii) ($*$) Finden Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A) := \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$.
   (iv) ($*$) Wir betrachten für $k \in \mathbb{N}$ die Unterräume $V_k := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq k\}$ von $\mathbb{R}[x]$. Wir wählen die Basen $\mathcal{C} := \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ und $\mathcal{D} = \{7, x-2, 4x^2\}$ von $V_4$ und $V_2$. Sei $f : V_4 \longrightarrow V_2$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Basen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ durch $A$ gegeben ist. Finden Sie alle Polynome $p \in V_4$, sodass $f(p) = 5 + x + 4x^2$.
2. Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ die Vektorräume $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ sowie die Dimensionen $\dim \mathrm{Kern}(f)$ und $\dim \mathrm{Im}(f)$.
   (i) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^3$ und $f$ gegeben durch $f(x) = Mx$ mit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (ii) $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, $W = \mathbb{C}$ und $f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, wobei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in V$.
3. ($*$) Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   - $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Im}(f)$;
   - $f^2 = 0$, $n$ ist gerade und $\dim \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2}n$.
4. Die *Transponierte* einer Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ ist die Matrix $A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ mit Eintrag $(i,j)$ gleich $a_{ji}$. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ und sei $C \in \mathrm{Mat}(n \times p, \mathbb{K})$.
   (i) Zeigen Sie, dass $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$, $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ und $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$ für $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (ii) Zeigen Sie, dass $(AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.
   (iii) Wir nehmen an, dass $n = m$ und $A$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass $A^{\mathrm{T}}$ invertierbar ist mit $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.
   (iv) Eine quadratische Matrix $A$ heißt *symmetrisch*, wenn $A^{\mathrm{T}} = A$ und *antisymmetrisch*, wenn $A^{\mathrm{T}} = -A$. Seien $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{Mat}(n \times p, \mathbb{K})$. Welche der folgenden Matrizen sind immer symmetrisch und welche sind immer antisymmetrisch: $B + B^{\mathrm{T}}$, $B - B^{\mathrm{T}}$, $C^{\mathrm{T}}C$, $C(B + B^{\mathrm{T}})C^{\mathrm{T}}$, $C(B - B^{\mathrm{T}})C^{\mathrm{T}}$?

*Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem ($*$) gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 30./31.01.2018.*
*Zweite Scheinklausur am Samstag 27.01. ab 9.00 Uhr.*

*www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718*