ONLINE-TEST 7

Aufgabe 1

Gegeben sind die Polynome $p(x) = 3x^3 + 5x - 2, q(x) = x^2 - x + 1$ und $r(x) = x + 2$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt die Gleichung $p(x)q(x) + r(x) = 3x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 8x$. ◯ wahr ◯falsch

---

Gegeben sind die Polynome $p(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 5, q(x) = 2x^2 + 1$ und $r(x) = x + 1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt die Gleichung $p(x)q(x) + r(x) = 4x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 3x + 6$. ◯ wahr ◯falsch

---

Gegeben sind die Polynome $p(x) = -3x^3 + x^2 + 4x + 5, q(x) = 3x^2 + 2$ und $r(x) = x + 1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt die Gleichung $p(x)q(x) + r(x) = -9x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 9x + 11$. ◯ wahr ◯falsch

---

Gegeben sind die Polynome $p(x) = -x^3 - x^2 + 2x + 6, q(x) = x^2 - 2$ und $r(x) = x + 3$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt die Gleichung $p(x)q(x) + r(x) = -x^5 - x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 3x - 9$. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 2

Betrachten Sie den Ring $\mathbb{R}[x]$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Ableitung eines Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist das Polynom $p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Menge $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(1) = p(1)\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$. ◯ wahr ◯falsch

---

Betrachten Sie den Ring $\mathbb{R}[x]$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Ableitung eines Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist das Polynom $p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Menge $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(2) = p(0)\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$. ◯ wahr ◯falsch

---

Betrachten Sie den Ring $\mathbb{R}[x]$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Ableitung eines Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist das Polynom $p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Menge $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(-1) = p(2)\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$. ◯ wahr ◯falsch

---

Betrachten Sie den Ring $\mathbb{R}[x]$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Ableitung eines Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist das Polynom $p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Menge $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(0) = p(1)\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 3

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) $(2, -1)$ und $(-1, 2)$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ◯ wahr ◯falsch

b) $(-3, 0)$ und $(5, 0)$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) $(1, -3)$ und $(3, -1)$ sind linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ◯ wahr ◯falsch

b) $(0, 2)$ und $(0, -7)$ sind linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) $(2, 0)$ und $(-5, 0)$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ◯ wahr ◯falsch

b) $(2, 3)$ und $(2, -3)$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) $(1, 1)$ und $(2, -2)$ sind linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ◯ wahr ◯falsch

b) $(2, 0)$ und $(-3, 0)$ sind linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 4

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Wenn $v_1 \in [\{v_2, v_3\}]$, dann sind v_1, v_2, v_3 linear abhängige Vektoren. ◯ wahr ◯falsch

b) Wenn v_1 und v_2 linear abhängig sind, dann $[\{v_1, v_2\}] = [\{v_1\}]$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Wenn $v_1 \in [\{v_2, v_3\}]$, dann sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängige Vektoren. ◯ wahr ◯falsch

b) Wenn v_1 und v_2 linear abhängig sind, dann $[\{v_1, v_2\}] = [\{v_1\}]$ oder $[\{v_1, v_2\}] = [\{v_2\}]$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Wenn $v_1 \notin [\{v_2, v_3\}]$, dann sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängige Vektoren. ◯ wahr ◯falsch

b) Wenn v_1 und v_2 linear unabhängig sind, dann $[\{v_1, v_2\}] \neq [\{v_1\}]$ und $[\{v_1, v_2\}] \neq [\{v_2\}]$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K sowie $v_1, v_2 \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Wenn $v_1 \notin [\{v_2\}]$, dann sind v_1, v_2 linear unabhängige Vektoren. ◯ wahr ◯falsch

b) Wenn v_1 und v_2 linear unabhängig sind, dann $[\{v_1\}] \neq [\{v_2\}]$. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 5

Sei a eine beliebige ganze Zahl. Betrachten Sie die Vektoren $v = (a, -1)$ und $w = (-2, 1)$. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

v und w sind genau dann linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, wenn $a = \boxed{}$ ist.

Sei a eine beliebige ganze Zahl. Betrachten Sie die Vektoren $v = (a, 2)$ und $w = (2, 1)$. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

v und w sind genau dann linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, wenn $a = \boxed{}$ ist.

Sei a eine beliebige ganze Zahl. Betrachten Sie die Vektoren $v = (a, 3)$ und $w = (3, 1)$. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

v und w sind genau dann linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, wenn $a = \boxed{}$ ist.

Sei a eine beliebige ganze Zahl. Betrachten Sie die Vektoren $v = (a, -2)$ und $w = (-1, 1)$. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

v und w sind genau dann linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, wenn $a = \boxed{}$ ist.