ONLINE-TEST 9

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Isomorphismus reeller Vektorräume. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $f(1,1,3) = (-1,3,2)$ ist und $f(2,1,1) = (1,0,1)$ ist, dann ist $f^{-1}(-3,6,3) = (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{})$.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Isomorphismus reeller Vektorräume. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $f(1,1,2) = (1,3,2)$ ist und $f(2,1,1) = (-1,0,-1)$ ist, dann ist $f^{-1}(3,6,5) = (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{})$.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Isomorphismus reeller Vektorräume. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $f(1,2,1) = (1,-3,1)$ ist und $f(2,1,2) = (1,-1,1)$ ist, dann ist $f^{-1}(1,-5,1) = (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{})$.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Isomorphismus reeller Vektorräume. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $f(3,1,3) = (5,1,1)$ ist und $f(2,1,-1) = (1,-2,1)$ ist, dann ist $f^{-1}(9,4,1) = (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{})$.

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei n eine natürliche Zahl. Betrachten Sie den $\mathbb{K}$-Vektorraum $U_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(x) = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(p(x)) \leq n\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Dimension von U_{10} ist 10. ○ wahr ○ falsch
2. Die Vektoren in allen Mengen $X \subseteq U_7$ mit 9 Elementen sind linear abhängig. ○ wahr ○ falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei n eine natürliche Zahl. Betrachten Sie den $\mathbb{K}$-Vektorraum $U_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(x) = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(p(x)) \leq n\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Dimension von U_7 ist 7. ○ wahr ○ falsch
2. Die Vektoren in allen Mengen $X \subseteq U_{10}$ mit 12 Elementen sind linear abhängig. ○ wahr ○ falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei n eine natürliche Zahl. Betrachten Sie den $\mathbb{K}$-Vektorraum $U_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(x) = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(p(x)) \leq n\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Dimension von U_8 ist 8. ◯ wahr ◯falsch
2. Die Vektoren in allen Mengen $X \subseteq U_9$ mit 11 Elementen sind linear abhängig. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei n eine natürliche Zahl. Betrachten Sie den $\mathbb{K}$-Vektorraum $U_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(x) = 0 \text{ oder } \operatorname{Grad}(p(x)) \leq n\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Dimension von U_9 ist 9. ◯ wahr ◯falsch
2. Die Vektoren in allen Mengen $X \subseteq U_8$ mit 10 Elementen sind linear abhängig. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 3

Sei p eine Primzahl und sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_p$ mit $\dim_{\mathbb{Z}_p}(V) = n$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

1. ☐Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 3\}$ ist $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)(p^n - p^3)$.
2. ☐Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 3\}$ ist $((p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2))/((p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2))$.
3. ☐Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 2\}$ ist $p^n(p^n - p)(p^n - p^2)$.
4. ☐Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum}\}$ ist unendlich.

Sei p eine Primzahl und sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_p$ mit $\dim_{\mathbb{Z}_p}(V) = n$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

1. ☐Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 2\}$ ist $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)(p^n - p^2)$.
2. ☐Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum}\}$ ist unendlich.
3. ☐Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 4\}$ ist $p^n(p^n - p)(p^n - p^2)(p^n - p^3)(p^n - p^4)$.
4. ☐Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 3\}$ ist $((p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2))/((p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2))$.

Sei p eine Primzahl und sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_p$ mit $\dim_{\mathbb{Z}_p}(V) = n$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

1. □Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 3\}$ ist $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)(p^n - p^3)$.
2. □Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 4\}$ ist $p^n(p^n - p)(p^n - p^2)(p^n - p^3)(p^n - p^4)$.
3. □Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 3\}$ ist $((p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2))/((p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2))$.
4. □Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum}\}$ ist unendlich.

Sei p eine Primzahl und sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_p$ mit $\dim_{\mathbb{Z}_p}(V) = n$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

1. □Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 4\}$ ist $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)(p^n - p^3)(p^n - p^4)$.
2. □Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 3\}$ ist $((p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2))/((p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2))$.
3. □Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum}\}$ ist unendlich.
4. □Die Anzahl der Elemente der Menge $\{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum und } \dim_{\mathbb{Z}_p}(U) = 4\}$ ist $p^n(p^n - p)(p^n - p^2)(p^n - p^3)(p^n - p^4)$.

Aufgabe 4

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V ist, dann ist $\{v_1 + v_2, v_2, v_2 - v_1\}$ auch eine Basis von V. ○ wahr ○falsch
2. Wenn v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, dann sind $v_1 - 2v_2 + v_3, v_2 - 3v_3, -v_3$ auch linear unabhängig. ○ wahr ○falsch

---

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V ist, dann ist $\{v_1 + 2v_2, v_2, 2v_2 - v_1\}$ auch eine Basis von V. ○ wahr ○falsch
2. Wenn v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, dann sind $v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3, -v_3$ auch linear unabhängig. ○ wahr ○falsch

---

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V ist, dann ist $\{v_1 - v_2, v_2 + v_1, v_2\}$ auch eine Basis von V. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, dann sind $v_1 - 3v_2 + v_3, v_2 + 2v_3, -v_3$ auch linear unabhängig. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ sowie $v_1, v_2, v_3 \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V ist, dann ist $\{v_1 + v_2, v_2, v_2 - v_1\}$ auch eine Basis von V. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, dann sind $v_1 - v_2 + v_3, v_2 - 2v_3, -v_3$ auch linear unabhängig. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 5

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von $\mathbb{R}^4$, sodass $v_1 = (1, 0, 2, 2)$, $v_2 = (0, 1, -1, -1)$ und $v_3 = (1, 1, 2, -2)$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von $\mathbb{R}^4$, sodass $v_1 = (2, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, -2, -2)$ und $v_3 = (3, 1, 1, -1)$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von $\mathbb{R}^4$, sodass $v_1 = (-1, 0, 2, 2)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$ und $v_3 = (3, 3, 1, 1)$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von $\mathbb{R}^4$, sodass $v_1 = (1, 1, -2, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1, -1)$ und $v_3 = (1, 2, 1, -2)$. ◯ wahr ◯falsch