ONLINE-TEST 10

——— Aufgabe 1 ———

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $U_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : \operatorname{Grad}(p(x)) \leq n\}$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Betrachten Sie die Abbildung $f : U_n \to U_n$ gegeben durch $f(p(x)) = p(x+1)$ (z.B. $f(x^2 - x + 1) = (x+1)^2 - (x+1) + 1)$). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Abbildung f ist ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. ◯ wahr ◯falsch
2. Alle $p(x) \in U_n$ können eindeutig als $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x+1)^i$ dargestellt werden, wobei $n \geq 0$ und für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $U_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : \operatorname{Grad}(p(x)) \leq n\}$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Betrachten Sie die Abbildung $f : U_n \to U_n$ gegeben durch $f(p(x)) = p(x-1)$ (z.B. $f(x^2 - x + 1) = (x-1)^2 - (x-1) + 1)$). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Abbildung f ist ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. ◯ wahr ◯falsch
2. Alle $p(x) \in U_n$ können eindeutig als $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x-1)^i$ dargestellt werden, wobei $n \geq 0$ und für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $U_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : \operatorname{Grad}(p(x)) \leq n\}$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Betrachten Sie die Abbildung $f : U_n \to U_n$ gegeben durch $f(p(x)) = p(x+2)$ (z.B. $f(x^2 - x + 1) = (x+2)^2 - (x+2) + 1)$). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Abbildung f ist ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. ◯ wahr ◯falsch
2. Alle $p(x) \in U_n$ können eindeutig als $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x+2)^i$ dargestellt werden, wobei $n \geq 0$ und für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $U_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : \operatorname{Grad}(p(x)) \leq n\}$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Betrachten Sie die Abbildung $f : U_n \to U_n$ gegeben durch $f(p(x)) = p(x-2)$ (z.B. $f(x^2 - x + 1) = (x-2)^2 - (x-2) + 1)$). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Abbildung f ist ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. ◯ wahr ◯falsch
2. Alle $p(x) \in U_n$ können eindeutig als $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x-2)^i$ dargestellt werden, wobei $n \geq 0$ und für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$. ◯ wahr ◯falsch

——— Aufgabe 2 ———

Betrachten Sie die Basis $B = ((1,-1,0),(0,1,-1),(1,1,1))$ von $\mathbb{R}^3$ sowie die Basis $B' = ((1,1),(1,0))$ von $\mathbb{R}^2$, wobei beide Basen angeordnet sind. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung gegeben durch $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B und B' ist

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Basis $B = ((0,1,-1),(1,-1,0),(1,1,1))$ von $\mathbb{R}^3$ sowie die Basis $B' = ((1,0),(1,1))$ von $\mathbb{R}^2$, wobei beide Basen angeordnet sind. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung gegeben durch $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B und B' ist

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Basis $B = ((1,1,1),(0,1,-1),(1,-1,0))$ von $\mathbb{R}^3$ sowie die Basis $B' = ((0,1),(1,1))$ von $\mathbb{R}^2$, wobei beide Basen angeordnet sind. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung gegeben durch $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B und B' ist

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Basis $B = ((0,1,-1),(1,1,1),(1,-1,0))$ von $\mathbb{R}^3$ sowie die Basis $B' = ((1,1),(0,1))$ von $\mathbb{R}^2$, wobei beide Basen angeordnet sind. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung gegeben durch $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B und B' ist

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, deren darstellende Matrix bezüglich der Basen $((1,1),(1,-1))$ und $((1,0,-1),(-2,2,2),(1,1,1))$, wobei beide Basen angeordnet sind, gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

1. $f(1,0) = (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{})$,

2. $f(0,1) = (\square, \square, \square)$.

Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, deren darstellende Matrix bezüglich der Basen $((1,1),(1,-1))$ und $((-2,2,2),(1,0,-1),(1,1,1))$, wobei beide Basen angeordnet sind, gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

1. $f(1,0) = (\square, \square, \square)$,
2. $f(0,1) = (\square, \square, \square)$.

Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, deren darstellende Matrix bezüglich der Basen $((1,1),(1,-1))$ und $((1,1,1),(1,0,-1),(-2,2,2))$, wobei beide Basen angeordnet sind, gegeben ist durch $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

1. $f(1,0) = (\square, \square, \square)$,
2. $f(0,1) = (\square, \square, \square)$.

Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, deren darstellende Matrix bezüglich der Basen $((1,1),(1,-1))$ und $((1,0,-1),(1,1,1),(-2,2,2))$, wobei beide Basen angeordnet sind, gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

1. $f(1,0) = (\square, \square, \square)$,
2. $f(0,1) = (\square, \square, \square)$.

Aufgabe 4

Sei p eine Primzahl und sei n eine natürliche Zahl. Gegeben sind die Mengen $X = \{f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Z}_p^n \mid f \text{ ist } \mathbb{Z}_p\text{-linear}\}$ und $Y = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^n) \mid B \text{ ist eine Basis von } \mathbb{Z}_p^n\}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt die Gleichung $|X| = |Y|$. ○ wahr ○ falsch

Sei p eine Primzahl und sei n eine natürliche Zahl. Gegeben sind die Mengen $X = \{f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Z}_p^n \mid f \text{ ist ein } \mathbb{Z}_p\text{-Vektorraumisomorphismus}\}$ und $Y = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^n) \mid B \text{ ist eine Basis von } \mathbb{Z}_p^n\}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt die Gleichung $|X| = n!|Y|$. ◯ wahr ◯falsch

Sei p eine Primzahl und sei n eine natürliche Zahl. Gegeben sind die Mengen $X = \{f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Z}_p^n \mid f \text{ ist } \mathbb{Z}_p\text{-linear}\}$ und $Y = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^n) : \text{ die Vektoren in } B \text{ sind linear unabhängig}\}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt die Gleichung $|X| = |Y|$. ◯ wahr ◯falsch

Sei p eine Primzahl und sei n eine natürliche Zahl. Gegeben sind die Mengen $X = \{f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Z}_p^n : f \text{ ist ein } \mathbb{Z}_p\text{-Vektorraumisomorphismus}\}$ und $Y = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^n) \mid \text{ die Vektoren in } B \text{ sind linear unabhängig}\}$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt die Gleichung $|X| = |Y|$. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 5

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f(1,0,1) = (-1,0,1)$, $f(-1,0,1) = (1,1,1)$ und $f(1,1,1) = (1,0,1)$. ◯ wahr ◯falsch
2. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass $f(1,0,1) = (2,2)$ und $f(0,1,0) = (0,0)$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f(2,0,1) = (-1,0,2)$, $f(-1,0,2) = (1,2,1)$ und $f(1,2,1) = (2,0,1)$. ◯ wahr ◯falsch
2. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass $f(1,1,1) = (3,2)$ und $f(0,1,1) = (0,0)$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f(1,0,-1) = (-1,0,-1)$, $f(-1,0,-1) = (1,1,1)$ und $f(1,-1,1) = (1,0,1)$. ◯ wahr ◯falsch
2. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass $f(2,-1,1) = (2,1)$ und $f(1,1,0) = (0,0)$. ◯ wahr ◯falsch

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f(1,0,0) = (1,1,0)$, $f(1,1,0) = (1,1,1)$ und $f(1,1,1) = (1,0,0)$. ◯ wahr ◯falsch

2. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass $f(1,0,1) = (2,2)$ und $f(0,1,0) = (0,0)$. ◯ wahr ◯falsch