# ONLINE-TEST 11

## Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $f(x) := x^2$ ist $\mathbb{Z}_2$-linear. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $f(x) := x^2 + x$ ist $\mathbb{Z}_2$-linear. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $f(x) := x^3$ ist $\mathbb{Z}_2$-linear. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $f(x) := x^3 + x$ ist $\mathbb{Z}_2$-linear. ◯ wahr ◯falsch

## Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mit $f(1,0) = (1,1)$, $f(0,1) = (2,2)$ und $f(2,2) = (4,4)$.
◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mit $f(1,0) = (1,1)$, $f(0,1) = (2,2)$ und $f(2,2) = (6,6)$.
◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mit $f(1,0) = (2,1)$, $f(0,1) = (1,2)$ und $f(3,3) = (6,6)$.
◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mit $f(1,0) = (2,1)$, $f(0,1) = (1,2)$ und $f(3,3) = (9,9)$.
◯ wahr ◯falsch

## Aufgabe 3

Sei $E_2 \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und sei $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

*(a)*

1. □ $A^4 = E_2$
2. □ Es gibt unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_2$.

*(b)*

1. □ $A^8 = E_2$
2. □ $A^n = E_2$ genau dann, wenn $n = 8$.

---

Sei $E_2 \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und sei $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

*(a)*

1. □ $A^9 = E_2$
2. □ $A^6 = E_2$

*(b)*

1. □ Es gibt unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_2$.
2. □ $A^n = E_2$ genau dann, wenn $n = 6$.

---

Sei $E_2 \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und sei $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

*(a)*

1. □ $A^5 = E_2$
2. □ Es gibt unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_2$.

*(b)*

1. ▯$A^{10} = E_2$
2. ▯$A^n = E_2$ genau dann, wenn $n = 10$.

---

Sei $E_2 \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und sei $A = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

*(a)*

1. ▯$A^3 = E_2$
2. ▯$A^6 = E_2$

*(b)*

1. ▯Es gibt unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_2$.
2. ▯$A^n = E_2$ genau dann, wenn $n = 6$.

## Aufgabe 4

Sei $K$ ein Körper. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Wir betrachten eine beliebige Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $K^n$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

*(a)*

1. ▯Wenn $(A - B)v_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \ldots n\}$, dann gilt $A = B$.
2. ▯$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

*(b)*

1. ▯Wenn $\{Av_1, \ldots, Av_n\}$ keine Basis von $K^n$ ist, dann gibt es $u \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Au = 0$.
2. ▯$(AB)^2 = A^2 B^2$

---

Sei $K$ ein Körper. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Wir betrachten eine beliebige Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $K^n$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

*(a)*

1. ▯$(AB)^2 = A^2 B^2$
2. ▯Wenn $(A + B)v_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \ldots n\}$, dann gilt $A = -B$.

*(b)*

1. ☐Wenn $\{Av_1, \ldots, Av_n\}$ keine Basis von $K^n$ ist, dann gibt es $u \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Au = 0$.
2. ☐$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

---

Sei $K$ ein Körper. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Wir betrachten eine beliebige Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $K^n$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

*(a)*

1. ☐Wenn $(A - B)v_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \ldots n\}$, dann gilt $A = -B$.
2. ☐Die Gleichung $(BA)^2 = B^2A^2$ gilt nicht für alle Matrizen $A$ und $B$.

*(b)*

1. ☐$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
2. ☐Wenn $\{Av_1, \ldots, Av_n\}$ keine Basis von $K^n$ ist, dann gibt es $u \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Au = 0$.

---

Sei $K$ ein Körper. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Wir betrachten eine beliebige Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $K^n$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

*(a)*

1. ☐Die Gleichung $(AB)^2 = A^2B^2$ gilt nicht für alle Matrizen $A$ und $B$.
2. ☐Wenn $(A + B)v_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \ldots n\}$, dann gilt $A = B$.

*(b)*

1. ☐Wenn $\{Av_1, \ldots, Av_n\}$ keine Basis von $K^n$ ist, dann gibt es $u \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Au = 0$.
2. ☐$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

## Aufgabe 5

Sei $K$ ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn alle Einträge von $A$ ungleich null sind, dann gilt $A \cdot A \neq 0$. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$, dann gilt $A = \lambda \cdot E_2$, wobei $\lambda \in K$ und $E_2$ die Einheitsmatrix ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $K$ ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn alle Einträge von $A$ ungleich null sind, dann gilt $A \cdot A \neq 0$. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$, dann sind maximal zwei Einträge von $A$ ungleich null. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $K$ ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn die Summe aller Einträge von $A$ null ergibt, dann gilt $A \cdot A = 0$. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$, dann gilt $A = \lambda \cdot E_2$, wobei $\lambda \in K$ und $E_2$ die Einheitsmatrix ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $K$ ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn die Summe aller Einträge von $A$ null ergibt, dann gilt $A \cdot A = 0$. ◯ wahr ◯falsch
2. Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$, dann sind maximal zwei Einträge von $A$ ungleich null. ◯ wahr ◯falsch