

ONLINE-TEST 11

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $f(x) := x^2$ ist \mathbb{Z}_2 -linear. wahr falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $f(x) := x^2 + x$ ist \mathbb{Z}_2 -linear. wahr falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $f(x) := x^3$ ist \mathbb{Z}_2 -linear. wahr falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ gegeben durch $f(x) := x^3 + x$ ist \mathbb{Z}_2 -linear. wahr falsch

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit $f(1, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1) = (2, 2)$ und $f(2, 2) = (4, 4)$.
 wahr falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit $f(1, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1) = (2, 2)$ und $f(2, 2) = (6, 6)$.
 wahr falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit $f(1, 0) = (2, 1)$, $f(0, 1) = (1, 2)$ und $f(3, 3) = (6, 6)$.
 wahr falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit $f(1, 0) = (2, 1)$, $f(0, 1) = (1, 2)$ und $f(3, 3) = (9, 9)$.
 wahr falsch

————— Aufgabe 3 —————

Sei $E_2 \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und sei $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

(a)

1. $A^4 = E_2$
2. Es gibt unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_2$.

(b)

1. $A^8 = E_2$
2. $A^n = E_2$ genau dann, wenn $n = 8$.

Sei $E_2 \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und sei $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

(a)

1. $A^9 = E_2$
2. $A^6 = E_2$

(b)

1. Es gibt unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_2$.
2. $A^n = E_2$ genau dann, wenn $n = 6$.

Sei $E_2 \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und sei $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

(a)

1. $A^5 = E_2$
2. Es gibt unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_2$.

(b)

1. $A^{10} = E_2$
2. $A^n = E_2$ genau dann, wenn $n = 10$.

Sei $E_2 \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und sei $A = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

(a)

1. $A^3 = E_2$
2. $A^6 = E_2$

(b)

1. Es gibt unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_2$.
2. $A^n = E_2$ genau dann, wenn $n = 6$.

————— Aufgabe 4 —————

Sei K ein Körper. Seien $A, B \in \text{Mat}(n \times n, K)$. Wir betrachten eine beliebige Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von K^n . Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

(a)

1. Wenn $(A - B)v_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt $A = B$.
2. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

(b)

1. Wenn $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ keine Basis von K^n ist, dann gibt es $u \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Au = 0$.
2. $(AB)^2 = A^2B^2$

Sei K ein Körper. Seien $A, B \in \text{Mat}(n \times n, K)$. Wir betrachten eine beliebige Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von K^n . Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

(a)

1. $(AB)^2 = A^2B^2$
2. Wenn $(A + B)v_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt $A = -B$.

(b)

- Wenn $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ keine Basis von K^n ist, dann gibt es $u \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Au = 0$.
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Sei K ein Körper. Seien $A, B \in \text{Mat}(n \times n, K)$. Wir betrachten eine beliebige Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von K^n . Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

(a)

- Wenn $(A - B)v_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt $A = -B$.
- Die Gleichung $(BA)^2 = B^2A^2$ gilt nicht für alle Matrizen A und B .

(b)

- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- Wenn $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ keine Basis von K^n ist, dann gibt es $u \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Au = 0$.

Sei K ein Körper. Seien $A, B \in \text{Mat}(n \times n, K)$. Wir betrachten eine beliebige Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von K^n . Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

(a)

- Die Gleichung $(AB)^2 = A^2B^2$ gilt nicht für alle Matrizen A und B .
- Wenn $(A + B)v_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt $A = B$.

(b)

- Wenn $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ keine Basis von K^n ist, dann gibt es $u \in K^n \setminus \{0\}$ mit $Au = 0$.
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Aufgabe 5

Sei K ein beliebiger Körper und $A \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wenn alle Einträge von A ungleich null sind, dann gilt $A \cdot A \neq 0$. wahr falsch
- Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $B \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$, dann gilt $A = \lambda \cdot E_2$, wobei $\lambda \in K$ und E_2 die Einheitsmatrix ist. wahr falsch

Sei K ein beliebiger Körper und $A \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn alle Einträge von A ungleich null sind, dann gilt $A \cdot A \neq 0$. wahr falsch
2. Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $B \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$, dann sind maximal zwei Einträge von A ungleich null. wahr falsch

Sei K ein beliebiger Körper und $A \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn die Summe aller Einträge von A null ergibt, dann gilt $A \cdot A = 0$. wahr falsch
2. Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $B \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$, dann gilt $A = \lambda \cdot E_2$, wobei $\lambda \in K$ und E_2 die Einheitsmatrix ist. wahr falsch

Sei K ein beliebiger Körper und $A \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn die Summe aller Einträge von A null ergibt, dann gilt $A \cdot A = 0$. wahr falsch
2. Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $B \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$, dann sind maximal zwei Einträge von A ungleich null. wahr falsch