Version A

Multiple choice (25 Punkte)

Hier sind keine Begründungen gefragt. Es gibt einen Punkt für jede richtige Antwort, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die Gesamtpunktzahl einer Aufgabe ist größer oder gleich null.

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über die symmetrische Gruppe Σ_n mit $n \in \mathbb{N}$ wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Für den Zykel $\sigma = (135) \in \Sigma_5$ gilt: $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.	○	○
$H := \{\sigma \in \Sigma_5 \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = -1\}$ ist eine Untergruppe von Σ_5.	○	○
Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\Sigma_3 \to \Sigma_3$ mit $(12) \mapsto (123)$.	○	○
Die Gruppen Σ_2 und $(\mathbb{F}_2, +)$ sind isomorph.	○	○
Wenn H eine normale Untergruppe von Σ_3 ist, dann gilt $\|H\| \neq 2$.	○	○

2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Sei $D : V^n \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Determinantenfunktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v_1, ..., v_n \in V$ gilt: $D(\lambda v_1, ..., \lambda v_n) = \lambda D(v_1, ..., v_n)$.	○	○
Wenn $D \neq 0$ und $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V ist, gilt $D(v_1, ..., v_n) \neq 0$.	○	○
Die Determinantenfunktion D ist surjektiv.	○	○
Für alle $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$ ist auch $f \circ D$ eine Determinantenfunktion.	○	○
Für alle $g \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V^n)$ ist auch $D \circ g$ eine Determinantenfunktion.	○	○

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Wenn $z \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f ist, ist auch $\overline{z}$ ein Eigenwert von f.	○	○
Für $n \geq 3$ gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu f.	○	○
Wenn f das Minimalpolynom $x^n - 1$ hat, dann ist f diagonalisierbar.	○	○
Wenn das Minimalpolynom zu f irreduzibel ist, so ist f diagonalisierbar.	○	○
Es gibt einen f-invarianten Unterraum $U \subset \mathbb{C}^n$ mit $\dim_{\mathbb{C}}(U) = 1$.	○	○

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Mit E_n bezeichnen wir die Einheitsmatrix in $\operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Die Matrizen $E_n, A, A^2, ..., A^n$ sind linear abhängig in $\operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$.	○	○
E_n ist Element des Unterraumes $[\{A, A^2, ..., A^n\}] \subset \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$.	○	○
Für $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$ gilt: $\operatorname{Adj}(A) \in [\{E_n, A, A^2, ..., A^{n-1}\}] \subset \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$.	○	○
Für $n = 2$ ist das charakteristische Polynom χ_A zu A irreduzibel über $\mathbb{K}$.	○	○
Ist χ_A irreduzibel über $\mathbb{K}$, so hat A keinen Eigenwert in $\mathbb{K}$.	○	○

5. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ mit Vektoren $b_1 = (1, 0, 1)^t, b_2 = (1, 1, 1)^t$ und $b_3 = (0, 1, 1)^t$. Mit $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ bezeichnen wir die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	*falsch*
Es gilt $b_1^*((0, 1, 0)^t) = -1$.	○	○
Es gilt $(b_1^* + b_2^* + b_3^*)(v) \neq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.	○	○
Für den von $(1, 0, 0)^t$ erzeugten Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ gilt: $b_2^*, b_3^* \in U^\circ$.	○	○
Es gibt einen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$, sodass $U^\circ = [\{b_1^* + b_2^*\}]$.	○	○
Für $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $f(b_1) = b_3$ gilt: $f^*(b_3^*) = b_1^*$.	○	○