Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Freitag, 20.07.2018
Aufgabenblatt 14

**Aufgaben zur Vorlesung:**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2**

*Wie in der Vorlesung in* 16.1 *wird im Folgenden mit $f^*$ der Endomorphismus bezeichnet, der zu einem gegebenen Endomorphismus $f$ eines endlich-dimensionalen unitären oder euklidischen Vektorraumes $V$ eindeutig existiert und die Eigenschaft hat, dass $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$, $\forall x, y \in V$.*

1. Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Die Determinante orthogonaler und unitärer Matrizen ist immer 1 oder -1.
   (ii) Wenn $f$ ein normaler Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes ist, dann gilt $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^*)$.
   (iii) Wenn $f$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes ist, sind die Abbildungen $f \circ f^*$ und $f + f^*$ selbstadjungiert.

2. Bestimmen Sie für jede der folgenden komplexen Matrizen $A_j$ eine unitäre Matrix $Q_j$ sowie eine Diagonalmatrix $D_j$, sodass $A_j = (\overline{Q_j})^{\mathrm{t}} D_j Q_j$.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 2 & 0 \\ -2i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $V$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Eine Abbildung $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ heißt *antiselbstadjungiert*, wenn $f^* = -f$. Wir definieren die Mengen
$$S = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \mid f \text{ ist selbstadjungiert}\},$$
$$A = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \mid f \text{ ist antiselbstadjungiert}\}.$$
Wir betrachten $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $S$ und $A$ $\mathbb{R}$-Unterräume von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ sind und $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) = S \oplus A$. Sind die antiselbstadjungierten Abbildungen normal?

4. Sei $S \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix mit Spalten $s_1, \ldots, s_n$ und sei $e_1, \ldots, e_n$ die Basis von $\mathbb{C}^n$, die man durch die Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens auf $s_1, \ldots, s_n$ erhält.
   (i) Zeigen Sie, dass die Matrix $Q$ mit Spalten $e_1, \ldots, e_n$ unitär ist, und bestimmen Sie eine obere Dreiecksmatrix $T$, sodass $QT = S$.
   (ii) Sei $A$ die reelle Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $Q$ sowie eine obere Dreiecksmatrix $T$, sodass $A = QT$.

5. Seien $V$ ein $n$-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ eine selbstadjungierte Abbildung. Nach Vorlesung sind die Eigenwerte $\lambda_k$ von $f$ reell. Wir nehmen an, dass $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Sei $\alpha : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ die Abbildung gegeben durch $\alpha(v) = \dfrac{\langle f(v), v\rangle}{\langle v, v\rangle}$.
   (i) Zeigen Sie, dass $\alpha(v) \in \mathbb{R}$ für jedes $v \in V \setminus \{0\}$. Gilt dieselbe Eigenschaft allgemeiner, wenn $f$ normal ist?
   (ii) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 \leq \alpha(v) \leq \lambda_n$ für jedes $v \in V \setminus \{0\}$.
   (iii) Beweisen Sie die folgende Gleichung für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$:
   $$\lambda_k = \min\{\max\{\alpha(v) \mid v \in U \setminus \{0\}\} \mid U \text{ Unterraum von } V \text{ mit } \dim_{\mathbb{C}} U = k\}.$$
   Folgt die Ungleichung im Teil (ii) aus dieser Gleichung?
   (iv) Wir betrachten den unitären Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $g : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis gegeben ist durch
   $$\begin{pmatrix} i & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie $\max\left\{\dfrac{\|g(v)\|}{\|v\|} \mid v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}\right\}$ und
   $$\min\left\{\max\left\{\frac{\|g(v)\|}{\|v\|} \mid v \in U \setminus \{0\}\right\} \mid U \text{ Unterraum von } \mathbb{C}^3 \text{ mit } \dim_{\mathbb{C}} U = 2\right\}.$$

*Die Aufgaben dieses Übungsblattes orientieren sich an den Vorlesungsinhalten der letzten beiden Semesterwochen und sind zum Üben dieses Stoffes gedacht. Lösungen zu den Aufgaben können nicht mehr abgegeben oder korrigiert werden und sind selbstverständlich auch nicht mehr relevant für die Zulassung. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:*

*www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18*