ONLINE-TEST 4

——— Aufgabe 1 ———

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(5 \times 5, \mathbb{R})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}([\{A^i : i \geq 0\}]) = 15$, wobei $[\{A^i : i \geq 0\}]$ die lineare Hülle von $\{A^i : i \geq 0\}$ ist.

☐Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{Q}$, sodass $A^2 = \lambda A$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(6 \times 6, \mathbb{C})$, sodass $\dim_{\mathbb{C}}([\{A^i : i \geq 0\}]) = 15$, wobei $[\{A^i : i \geq 0\}]$ die lineare Hülle von $\{A^i : i \geq 0\}$ ist.

☐Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\mu \in \mathbb{R}$, sodass $\mu A = A^2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(7 \times 7, \mathbb{Q})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}([\{A^i : i \geq 0\}]) = 13$, wobei $[\{A^i : i \geq 0\}]$ die lineare Hülle von $\{A^i : i \geq 0\}$ ist.

☐Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda A = A^2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(9 \times 9, \mathbb{Q})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}([\{A^i : i \geq 0\}]) = 19$, wobei $[\{A^i : i \geq 0\}]$ die lineare Hülle von $\{A^i : i \geq 0\}$ ist.

☐Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\mu \in \mathbb{C}$, sodass $\mu A = A^2$.

——— Aufgabe 2 ———

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$M^{-1} \in [\{M^i : i \geq 0\}]$ für alle $M \in \mathsf{GL}(5, \mathbb{R})$.

☐Es gibt $M \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$, sodass $\mathsf{Adj}(M) \notin [\{E_2, M\}]$, wobei E_2 die Einheitsmatrix ist.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$M^{-1} \in [\{M^i : i \geq 0\}]$ für alle $M \in \mathsf{GL}(6, \mathbb{Q})$.

☐Es gibt $M \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\mathsf{Adj}(M) \notin [\{E_2, M\}]$, wobei E_2 die Einheitsmatrix ist.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$M^{-1} \in [\{M^i : i \geq 0\}]$ für alle $M \in \mathsf{GL}(7, \mathbb{C})$.

☐Es gibt $M \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, sodass $\mathsf{Adj}(M) \notin [\{E_2, M\}]$, wobei E_2 die Einheitsmatrix ist.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$M^{-1} \in [\{M^i : i \geq 0\}]$ für alle $M \in \mathsf{GL}(8, \mathbb{C})$.

☐Es gibt $M \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\mathsf{Adj}(M) \notin [\{E_2, M\}]$, wobei E_2 die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{Q}[x]$ der Vektorraum der Polynome und sei $\varphi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$ die lineare Abbildung gegeben durch $\varphi(P) = P(2)$. Betrachten Sie die Basis $B = \{x^i : i \geq 0\}$ von $\mathbb{Q}[x]$. Für alle $i \geq 0$ bezeichnen wir mit $(x^i)^*$ die lineare Abbildung gegeben durch $(x^i)^*(x^i) = 1$ und $(x^i)^*(x^j) = 0$ für alle $j \neq i$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es gibt $n \geq 0$ und $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, sodass $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x^i)^*$. ◯ wahr ◯falsch
2. Für alle $n \geq 0$ ist die Menge $\{(x^i)^* : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\{P \in \mathbb{Q}[x] : P = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(P) \leq n\}^*$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome und sei $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ die lineare Abbildung gegeben durch $\varphi(P) = P(3)$. Betrachten Sie die Basis $B = \{x^i : i \geq 0\}$ von $\mathbb{C}[x]$. Für alle $i \geq 0$ bezeichnen wir mit $(x^i)^*$ die lineare Abbildung gegeben durch $(x^i)^*(x^i) = 1$ und $(x^i)^*(x^j) = 0$ für alle $j \neq i$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Für alle $n \geq 0$ ist die Menge $\{(x^i)^* : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\{P \in \mathbb{C}[x] : P = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(P) \leq n\}^*$. ◯ wahr ◯falsch
2. Es gibt $n \geq 0$ und $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x^i)^*$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome und sei $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung gegeben durch $\varphi(P) = P(-2)$. Betrachten Sie die Basis $B = \{x^i : i \geq 0\}$ von $\mathbb{R}[x]$. Für alle $i \geq 0$ bezeichnen wir mit $(x^i)^*$ die lineare Abbildung gegeben durch $(x^i)^*(x^i) = 1$ und $(x^i)^*(x^j) = 0$ für alle $j \neq i$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Für alle $n \geq 0$ ist die Menge $\{(x^i)^* : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\{P \in \mathbb{R}[x] : P = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(P) \leq n\}^*$. ◯ wahr ◯falsch

2. Es gibt $n \geq 0$ und $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, sodass $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x^i)^*$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome und sei $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ die lineare Abbildung gegeben durch $\varphi(P) = P(-3)$. Betrachten Sie die Basis $B = \{x^i : i \geq 0\}$ von $\mathbb{C}[x]$. Für alle $i \geq 0$ bezeichnen wir mit $(x^i)^*$ die lineare Abbildung gegeben durch $(x^i)^*(x^i) = 1$ und $(x^i)^*(x^j) = 0$ für alle $j \neq i$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es gibt $n \geq 0$ und $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x^i)^*$. ◯ wahr ◯falsch
2. Für alle $n \geq 0$ ist die Menge $\{(x^i)^* : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\{P \in \mathbb{C}[x] : P = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(P) \leq n\}^*$. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 4

Sei V der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $V = [\{(1,1,2), (-1,0,1)\}]$. Sei $\varphi \in V^\circ \setminus \{0\}$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\varphi(1,1,1) \neq 0$.

☐ $\varphi(1,0,2) = 3$.

☐ $\varphi(a,0,b) = \varphi(b,0,a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Sei V der Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$ gegeben durch $V = [\{(1,0,-1), (1,1,3)\}]$. Sei $\varphi \in V^\circ \setminus \{0\}$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\varphi(1,1,1) \neq 0$.

☐ $\varphi(a,0,b) - \varphi(b,0,a) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

☐ $\varphi(1,-1,1) = 6$.

Sei V der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $V = [\{(1,1,-2), (-2,0,2)\}]$. Sei $\varphi \in V^\circ \setminus \{0\}$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\varphi(1,1,1) = 3$.

☐ $\varphi(1,-1,1) \neq 0$.

☐ $\varphi(0,a,b) - \varphi(0,b,a) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Sei V der Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$ gegeben durch $V = [\{(2,0,-2), (-1,-1,3)\}]$. Sei $\varphi \in V^\circ \setminus \{0\}$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\varphi(1,1,1) = 4$.

☐ $\varphi(-1,3,1) \neq 0$.

☐ $\varphi(a,0,b) - \varphi(b,0,a) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

——— Aufgabe 5 ———

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{15})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \operatorname{Kern}(\varphi)) = 6$. ◯ wahr ◯ falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{17})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \operatorname{Kern}(\varphi)) = 4$. ◯ wahr ◯ falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{13})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \operatorname{Kern}(\varphi)) = 4$. ◯ wahr ◯ falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{19})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \operatorname{Kern}(\varphi)) = 2$. ◯ wahr ◯ falsch