

ONLINE-TEST 5

Aufgabe 1

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie den \mathbb{R} -Vektorraum W gegeben durch

$$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \text{es gibt } \varphi \in V^*, \text{ sodass } \varphi(f(x, y, z)) = ax + by + cz \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = 2$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} W = \boxed{}$.

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie den \mathbb{R} -Vektorraum W gegeben durch

$$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \text{es gibt } \varphi \in V^*, \text{ sodass } \varphi(f(x, y, z)) = ax + by + cz \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = 3$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} W = \boxed{}$.

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie den \mathbb{R} -Vektorraum W gegeben durch

$$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \text{es gibt } \varphi \in V^*, \text{ sodass } \varphi(f(x, y, z)) = ax + by + cz \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = \boxed{}$.

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie den \mathbb{R} -Vektorraum W gegeben durch

$$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \text{es gibt } \varphi \in V^*, \text{ sodass } \varphi(f(x, y, z)) = ax + by + cz \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = \boxed{}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Matrix M gegeben durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -16 & -44 \\ 0 & 4 & 12 & 28 \\ 0 & -5 & -16 & -43 \\ 1 & 4 & 11 & 28 \end{pmatrix}$$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von M bezeichnen wir mit $gV(M, \lambda)$ und mit $\mu(\chi_M, \lambda)$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit von λ . Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

- $gV(M, i) = \boxed{}$.
 - $\mu(\chi_M, 8) = \boxed{}$.
-

Betrachten Sie die Matrix M gegeben durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 & -44 \\ 0 & -4 & 12 & -28 \\ 0 & -5 & 16 & -43 \\ 1 & -4 & 11 & -28 \end{pmatrix}$$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von M bezeichnen wir mit $gV(M, \lambda)$ und mit $\mu(\chi_M, \lambda)$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit von λ . Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

- $gV(M, i) = \boxed{}$.
 - $\mu(\chi_M, -8) = \boxed{}$.
-

Betrachten Sie die Matrix M gegeben durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -5 & 4 \\ -16 & 12 & -16 & 11 \\ -44 & 28 & -43 & 28 \end{pmatrix}$$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von M bezeichnen wir mit $gV(M, \lambda)$ und mit $\mu(\chi_M, \lambda)$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit von λ . Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

- $\mu(\chi_M, 8) = \boxed{}$.
 - $gV(M, i) = \boxed{}$.
-

Betrachten Sie die Matrix M gegeben durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -5 & -4 \\ 16 & 12 & 16 & 11 \\ -44 & -28 & -43 & -28 \end{pmatrix}$$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von M bezeichnen wir mit $gV(M, \lambda)$ und mit $\mu(\chi_M, \lambda)$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit von λ . Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

- $\mu(\chi_M, -8) = \boxed{}$.
- $gV(M, i) = \boxed{}$.

————— Aufgabe 3 —————

Sei $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\sqrt{2}$ ein Eigenwert von A ist und $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Kreuzen Sie die wahre Aussage an.

- A ist nicht diagonalisierbar.
- $gV(A, \sqrt{2}) \neq gV(A, -\sqrt{2})$.
- $gV(A, -\sqrt{2}) = \mu(\chi_A, -\sqrt{2})$.

Sei $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\sqrt{3}$ ein Eigenwert von A ist und $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Kreuzen Sie die wahre Aussage an.

- A ist nicht diagonalisierbar.
- $gV(A, -\sqrt{3}) = \mu(\chi_A, -\sqrt{3})$.
- $gV(A, \sqrt{3}) \neq gV(A, -\sqrt{3})$.

Sei $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\sqrt{5}$ ein Eigenwert von A ist und $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Kreuzen Sie die wahre Aussage an.

- $gV(A, \sqrt{5}) \neq gV(A, -\sqrt{5})$.
- $gV(A, -\sqrt{5}) = \mu(\chi_A, -\sqrt{5})$.
- A ist nicht diagonalisierbar.

Sei $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass $\sqrt{7}$ ein Eigenwert von A ist und $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Kreuzen Sie die wahre Aussage an.

- $gV(A, -\sqrt{7}) = \mu(\chi_A, -\sqrt{7})$.
- A ist nicht diagonalisierbar.
- $gV(A, \sqrt{7}) \neq gV(A, -\sqrt{7})$.

————— Aufgabe 4 —————

Sei $A \in \text{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq \boxed{}$. _____

Sei $A \in \text{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq \boxed{}$. _____

Sei $A \in \text{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq \boxed{}$. _____

Sei $A \in \text{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq \boxed{}$.

_____ Aufgabe 5 _____

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist m_A ein Teiler von χ_A .

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A .

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2 .

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist χ_A ein Teiler von m_A .

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist m_A ein Teiler von χ_A .

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2 .

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist χ_A ein Teiler von m_A .

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2 .

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist m_A ein Teiler von χ_A .

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist m_A ein Teiler von χ_A .

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2 .

Für alle $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A .