Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 17.01.2018
Aufgabenblatt 11

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}_3$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben ist durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (i) $(*)$ Sei $\mathcal{B}$ die Basis des $\mathbb{R}^3$ mit den Vektoren $b_1 = (1, -1, 2)$, $b_2 = (2, 3, 7)$ und $b_3 = (2, 3, 6)$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ bezüglich der Basen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{B}$ (d.h. den Basiswechsel von $\mathcal{E}_3$ nach $\mathcal{B}$) sowie den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}_3$. Geben Sie auch die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ an.
   (ii) $(*)$ Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Folgern Sie, dass $f^n(v) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
   (iii) $(*)$ Schreiben Sie die Matrix A als Produkt von Elementarmatrizen.
2. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} [1] & [1] & [1] \\ [0] & [2] & [3] \\ [0] & [3] & [2] \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}_5)$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ für $x \in (\mathbb{Z}_5)^3$.
3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heißt *nilpotent*, wenn $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$, und *idempotent*, wenn $f^2 = f$. Die Abbildung f ist eine *Involution*, wenn $f^2 = \mathrm{id}_V$.
   (i) $(*)$ Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ nilpotent mit $f^k = 0$ und $f^{k-1} \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $(\mathrm{id}_V - f) \circ (\mathrm{id}_V + f + f^2)$ für $k = 3$. Zeigen Sie zudem, dass $\mathrm{id}_V - f$ bijektiv ist für alle $k \in \mathbb{N}$.
   (ii) $(*)$ Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ idempotent. Zeigen Sie, dass auch $\mathrm{id}_V - f$ idempotent ist. Sei nun $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ eine Involution ist genau dann, wenn $2^{-1}(\mathrm{id}_V + f)$ idempotent ist.
   (iii) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ idempotent. Zeigen Sie, dass dann $V = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ und $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
   (iv) Seien $f, g, h \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit f, g nilpotent und h bijektiv. Sei zudem $\lambda \in \mathbb{K}$. Entscheiden Sie, ob $f + g$, $\lambda \cdot f$ und $h \circ f \circ h^{-1}$ nilpotent sind. Entscheiden Sie auch, ob die Abbildungen $f + g$, $\lambda \cdot f$ und $h \circ f \circ h^{-1}$ idempotent (bzw. Involutionen) sind, wenn f und g idempotent (bzw. Involutionen) sind.
   (v) Entscheiden Sie, welche Abbildungen in $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ reflexive, symmetrische oder transitive Relationen sind.
4. Wir betrachten die Matrizen $Q_i^j(\lambda), P_i^j, S_i(\lambda) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ aus der Vorlesung. Berechnen Sie $Q_i^j(\lambda)Q_i^j(-\lambda)$, $P_i^j P_i^j$, $S_i(\lambda)S_i(\lambda^{-1})$ sowie $(Q_i^j(\lambda))^n$, $(P_i^j)^n$, $(S_i(\lambda))^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 23./24.01.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718