Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 31.01.2018
Aufgabenblatt 13

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Bestimmen Sie den Rang und, wenn möglich, die inverse Matrix folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R}) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{Z}_3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1+i & 2+i & 3+i \\ 1-i & 2-i & 3-i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{C}) \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3\times 4, \mathbb{Q})$$

2. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die Matrix $A_\lambda \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$ wie folgt:

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\lambda & 2+\lambda & -1 \\ -\lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit $f_\lambda(x) := A_\lambda \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie Basen des Kerns und des Bildes von f_λ. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist f_λ ein Isomorphismus?

3. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$ heißt *magisch*, wenn ihre Zeilensummen $a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}$ und ihre Spaltensummen $a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}$ alle übereinstimmen. Zeigen Sie, dass die Menge der magischen Matrizen in $\mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$ einen Unterraum bildet und bestimmen Sie eine Basis dieses Unterraumes. Analog definieren wir magische $n\times n$-Matrizen für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$. Stellen Sie eine Vermutung über die Dimension des Unterraumes der magischen $n \times n$-Matrizen auf und beweisen Sie diese.

4. Seien V und W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $W' \subset W$ ein Unterraum. Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(W') \subset V$ ein Unterraum ist und dass $\dim f^{-1}(W') = \dim(W' \cap \mathrm{Im}(f)) + \dim \mathrm{Kern}(f)$.

5. Seien U, V und W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und seien $e, f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(U)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ und $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.
   (i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Im}(e+f) \subset \mathrm{Im}(e) + \mathrm{Im}(f)$ und folgern Sie daraus, dass $\dim \mathrm{Im}(e+f) \le \dim \mathrm{Im}(e) + \dim \mathrm{Im}(f)$.
   (ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(g) \subset \mathrm{Kern}(h \circ g)$ und $\mathrm{Im}(h\circ g) \subset \mathrm{Im}(h)$.
   (iii) Zeigen Sie, dass $\dim \mathrm{Kern}(g) \le \dim \mathrm{Kern}(h\circ g) \le \dim \mathrm{Kern}(h) + \dim \mathrm{Kern}(g)$.
   (iv) Zeigen Sie, dass $\dim \mathrm{Im}(h) + \dim \mathrm{Im}(g) - \dim V \le \dim \mathrm{Im}(h \circ g) \le \dim \mathrm{Im}(h)$.

Dieses Übungsblatt enthält nur Votieraufgaben, die in der Übungsgruppe am 6./7.2.2018 besprochen werden. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung: www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718