Lösungen (ohne vollständige Begründungen) zu den ersten drei Aufgaben von Blatt 14

1.

(i) Der Kern von A ist gegeben durch

$$\operatorname{Kern}(A) = \left[\left\{\begin{pmatrix}24\\7\\0\\0\\-4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right].$$

Es gilt $\dim(\operatorname{Kern}(A)) = 3$, $\operatorname{Rang}(A) = 3$ und A hat die Gaußsche Normalform

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat keine inverse Matrix.

(ii) Die Matrix B hat Kern gleich $\{0_{(\mathbb{Z}_7)^3}\}$. Also gilt $\dim(\operatorname{Kern}(B)) = 0$, $\operatorname{Rang}(B) = 3$ und B hat die Gaußsche Normalform

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix von B ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}4&6&4\\0&2&5\\1&2&2\end{pmatrix}.$$

(iii) Die Matrix C hat Kern gleich $\{0_{\mathbb{C}^4}\}$. Also ist $\dim(\operatorname{Kern}(C)) = 0$, $\operatorname{Rang}(C) = 4$ und C hat die Gaußsche Normalform

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix von C ist

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&-i&0\\-\frac{i}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&0&-\frac{i}{2}\\0&1-i&-1&0\end{pmatrix}.$$

2.

Die Matrix A ist invertierbar. Für $T := E_3$ und

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{20}{21} & \frac{17}{21} & -\frac{16}{21} \\ \frac{19}{21} & -\frac{13}{21} & \frac{11}{21} \end{pmatrix}$$

erhält man $SAT = E_3$. Beachten Sie, dass die Wahl von S und T, für die das Produkt SAT in der Gaußschen Normalform ist, nicht eindeutig ist.
Seien c_1', c_2' und c_3' die Spalten von A:

$$c_1' := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c_2' := \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c_3' := \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Basis $\mathcal{C}' := \{c_1', c_2', c_3'\}$ von $\mathbb{R}^3$. Sei $\mathcal{B} = \mathcal{C} := \{c_1, c_2, c_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Dann ist T gleich der darstellenden Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ bezüglich $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$ und S ist gleich der darstellenden Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}'$. Außerdem gilt $\psi(c_j) = c_j'$ für $1 \leq j \leq 3$.

3.

Die Wahl von $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ und $\mathcal{B}' = \{b_1', b_2', b_3'\}$, für die die Gleichungen $\varphi(b_j) = b_j'$ $(1 \leq j \leq l)$ und $\varphi(b_j) = 0$ $(l < j \leq 4)$ gelten, ist nicht eindeutig. Seien

$$b_1 := i, \quad b_2 := ix, \quad b_3 := ix^3, \quad b_4 := \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}ix + ix^2,$$
$$b_1' := 2 + 3x + x^2, \quad b_2' := 4 + 3x + 5x^2, \quad b_3' := x + x^2.$$

Dann gilt $\varphi(b_j) = b_j'$ für $1 \leq j \leq 3$ und $\varphi(b_4) = 0$. Die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{C}[x]_3}$ bezüglich $\mathcal{C}_3$ und $\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{C}[x]_2}$ bezüglich $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}_2$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2i & -4i & 0 \\ -3i & -3i & -i \\ -i & -5i & -i \end{pmatrix}.$$